Lien ryhmät ja monistot (Mat-1.3531) Harj. 2.

Peltonen/Dahl 3.2.2006

1. Osoita, että pätee $R_{\mathcal{S}_n(A)} \circ f_n = f_n \circ R_A$, kun $A \in M_n(\mathbb{C})$, $f_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $f_n(a_1+ib_1, \ldots, a_n+ib_n) = (a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ ja $\mathcal{S}_n(x_{jk}+iy_{jk}) = \begin{pmatrix} x_{jk} & y_{jk} \\ -y_{jk} & x_{jk} \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$, $(x_{jk}+iy_{jk}) \in M_n(\mathbb{C})$.

2. Olkoon $\tilde{f}_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\tilde{f}_n(a_1+ib_1, \ldots, a_n+ib_n) := (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_n)$. Kuinka pitää määritellä kuvaus $\tilde{\mathcal{S}}_n : M_n(\mathbb{C}) \to M_{2n}(\mathbb{R})$, jotta pätee $R_{\tilde{\mathcal{S}}_n(A)} \circ \tilde{f}_n = \tilde{f}_n \circ R_A$? Kuinka pitää asettaa kompleksinen struktuuri $\tilde{J}_{2n}$, jotta pätisi: $B\tilde{J}_{2n} = \tilde{J}_{2n} B \;\forall B \in M_{2n}(\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow$ $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$ kompleksilineaarinen?

3. Osoita, että jos pätee $B \cdot J_{2n} = J_{2n} \cdot B \;\forall B \in M_{2n}(\mathbb{R})$, niin B on kompleksilineaarinen.

4. Osoita, että kuvaus $\Psi_n : M_n(\mathbb{H}^n) \to M_{2n}(\mathbb{C})$ on $\mathbb{R}$-lineaarinen. Onko Ψ_n $\mathbb{C}$-lineaarinen? Osoita, että pätee $\Psi_n(A \cdot B) = \Psi_n(A)\Psi_n(B) \;\forall\; A, B \in M_n(\mathbb{H}^n)$.

5. Todista luennolla esitetty lause 2.7. Ovatko matriisit I_{4n} ja $J_{4n} \in M_{4n}(\mathbb{R})$ kvaternionilineaarisia?

6. a) Osoita, että kaikilla $A \in GL_1(\mathbb{H})$ $\det(A) \in \mathbb{R}$.

b) Osoita, että $SL_n(\mathbb{H}) := \{A \in GL_n(\mathbb{H}) \mid \det(A) = 1\}$ on $GL_n(\mathbb{H})$:n aliryhmä.

c) Muodosta luonnollinen bijektio $SL_1(\mathbb{H})$:n ja pallon $S^3 = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid |v| = 1\}$ välille.