Lien ryhmät ja monistot (Mat-1.3531) Harj. 1

Peltonen / Dahl 27.1.200

1. Osoita, että kvaterniot muodostavat rinnokunnan.

2. Määritellään kvaternionin $q = a + bi + cj + dk$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ reaali- ja imaginaariosa asettamalla $Re(q) = a$ ja $Im(q) = bi + cj + dk$. Olkoot $q_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ ja $q_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ puhtaasti imaginaarisia kvaternioneja, $x_l, y_l, z_l \in \mathbb{R}$, $l = 1, 2$. Osoita, että pätee $(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = -Re(q_1 \cdot q_2)$ ja $(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = Im(q_1 \cdot q_2)$, kun yhtälöiden vasemmalla puolella on $\mathbb{R}^3$:in vektoreiden (x_l, y_l, z_l) ($l = 1, 2$) pistetulo ($\cdot$) ja ristitulo ($\times$) (ja oikealla puolella kvaternioiden tulo).

3. Olkoot $q_1, q_2 \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$. Osoita, että pätee
$$q_1 q_2 = q_2 q_1 \iff Im(q_1) = \lambda Im(q_2) \text{ jollakin } \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. Karakterisoi antikommutatiiviset kvaterniot l. parit $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ s.e. pätee $q_1 q_2 = -q_2 q_1$.

5. a) Osoita, että jos $q \in \mathbb{H}$ toteuttaa $qi = iq$, niin $q \in \mathbb{C}$

b) Osoita, että jos $\lambda \in \mathbb{H}$ toteuttaa $\lambda q = q \lambda$ $\forall q \in \mathbb{H}$, niin pätee $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. Olkoon $A = \begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{H})$. Osoita, että $\det(A) \neq 0$, mutta $R_A : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ ei ole kääntyvä. Määrää $\det(\Psi_2(A))$.