

# Johdatus differentiaaligeometriaan: Käyrät ja pinnat

Harj.  
6.  
2.3.200

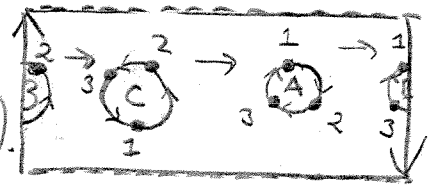
Mat - 1, 3530

Peltonen / Pertteliö

- 1) Olkoon  $S$  sileä pinta ja  $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  säännöllinen parametrisointi ja  $\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow \sigma(U)$  sileä polku. Osoita, että tasopolku  $t \mapsto (\sigma^{-1} \circ \gamma)(t)$  on sileä.
- 2) Osoita, että tangenttivaruuden määntelmä on riippumaton parametrisoinnin valinnasta.
- 3) Onko funktion  $h: x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$  graafin  $\{(x, h(x)) \mid x > 0\}$  määrittämä yleistyetty sylinterin säännöllinen pinta?

4) Möbiuksen nauhan suunnistamattomuus voidaan karakterisoida seuraavan ominaisuuden avulla. Työnnettään nauhan pinnalla kekkoa (A), joka suunnistettu myötäpäivään.

Yrittämättä nauhan reunaa kiekon suunnistus saadaan muuttamalla vastakkaiseksi (A)  $\rightarrow$  (B)  $\rightarrow$  (C).



Tarkastellaan umpinaista torusta

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ((x^2 + y^2)^{1/2} - a)^2 + z^2 \leq b^2\}$$

Samastetaan meridiaanisympyrin  $(y-a)^2 + z^2 = b^2$  kaaret

kuvan mukaisesti:  $(0, a-b, 0) \in M \ni (0, a+b, 0)$  ja edelleen koko

umpinaisen toruksen reuna vastaavasti.

a) toka, että meridiaanikielikosta  $M$  saadaan Möbiuksen nauha pistämällä pieni kiekko ja lopputuloksena Möbiuksen nauha kaksipuolisena umpitoruksesta reuna + identifioidulla saadussa avaruudessa  $N$ .

b) toka, että torus löytyy yksipuolisena avaruudessa  $N$ , kun umpitorusta leikataan  $(x, y)$ -tasolla.

5) Etsi seuraavien parametrisoitujen pintojen esitys muodossa  $F(x, y, z) = 0$  ja määritä ensimmäinen genusmuoto. Mitä käyrä esittää kun  $u = \text{vakio}$  tai  $v = \text{vakio}$

a) Ellipsoidi:  $(u, v) \mapsto (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u)$

b) Kaksilehtinen hyperboloidi:  $(u, v) \mapsto (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u)$