

# Johdatus differentiaaligeometriaan: Käyrät ja pinnat

Harj. (2.)  
2.2.2007

Mat - 1.3530

Peltinen / Perkiö

- 1) Määrittä seuraavien polkujen kaarevuus  $\kappa$  säännöllisissä pisteissä.
- $t \mapsto \left( \frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$
  - $t \mapsto \left( \frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right)$
  - $t \mapsto (t, \cosh t)$  (ketjukäyrä)
  - $t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$  (astroidi)
- Totea, että tulkinta  $\kappa = \infty$  on luonnollinen d)-kohdassa pisteissä  $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ .

- 2) Osoita, että säännöllisen polun  $t \mapsto c(t)$  kaarevuus  $t \mapsto \kappa(t)$  on sileä ( $C^\infty$ ) kun  $\kappa(t) > 0 \forall t$ . Osoita vastaesimerkeillä, että väite ei päde ilman oletusta  $\kappa > 0$ .

- 3) Olkoon  $t \mapsto c(t)$  tasopolku, joka on parametrisoitu kaarenpituuden suhteen. Osoita, että pätee  $n_s'(t) = -\kappa_s(t) c'(t)$ .

- 4) Osoita, että säännöllisen tasopolun suunnistettu kaarevuus  $t \mapsto \kappa_s(t)$  on sileä funktio.

- 5) Olkoon  $c$  kaarenpituuden suhteen parametrisoitu tasopolku, jonka kaarevuus  $\kappa > 0$ . Määritellään  $c$  in kaarevuuskeskipiste  $E(t)$  pisteessä  $c(t)$  funktiona  $E: t \mapsto E(t)$ ,

$$E(t) = c(t) + \frac{1}{\kappa_s(t)} n_s(t).$$

Osoita, että  $E(t)$ -keskinen  $1/|\kappa_s(t)|$  -säteinen ympyrä (polun  $c$  koskettava ympyrä) pisteessä  $c(t)$  on tangentiaalinen polulle  $c$  pisteessä  $c(t)$  ja sillä on sama kaarevuus.

- 6) Määrittä tehtävän 1) polkujen a) ja b) tangentti-, päänormaali- ja sivunormaalivektorit sekä totea, että Frenét-yhtälöt ovat voimassa. Osoita, että polku 1b) on ympyrä ja etsi sen keskipiste, säde ja taso, jossa se sijaitsee.