MAT. – 1.3301 COMPLEX ANALYSIS LONDEN / TIINANMÄ...
EXERCISE SET 6. (IV 2006 – 2007)

1. LET $\Gamma_\alpha(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \mid |x-t| < \alpha y,\ 0<y<\infty\}$

HERE $\alpha > 0$, $t \in \mathbb{R}$.

LET $f \in L^1\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)$. DEFINE $u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} P_y(s) f(x-s)\,ds$

SHOW THAT
$$\sup_{\Gamma_\alpha(t)} |u(x,y)| \le A_\alpha M f(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$
WHERE
$$A_\alpha = 1 + \frac{2\alpha}{\pi}.$$

2. WHAT DOES THE PRIME NUMBER THEOREM SAY ABOUT HOW MANY PRIME NUMBERS THERE ARE BETWEEN 10^N AND 10^{N+1} AS $N \to \infty$?

3. DEFINE THE Ψ FUNCTION OF GAUSS BY
$$\Psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}.$$
PROVE THAT Ψ IS MEROMORPHIC ON ALL OF $\mathbb{C}$ WITH POLES AT THE NONPOSITIVE INTEGERS. COMPUTE THE RESIDUES AT THESE POLES. SHOW THAT $\Psi(1) = -\gamma$. SHOW THAT $\Psi(z) - \Psi(1-z) = -\pi \cot(\pi z)$.

4. SHOW THAT IF $\operatorname{Re} z > 0$, THEN
$$\Gamma(z) = \frac{1}{2i\sin(\pi z)} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} e^w (-w)^{z-1}\,dw$$
WHERE C_1 IS THE HANKEL CONTOUR.

5. PROVE THAT
$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-1/t}}{t}\,dt$$

6.1 Olkoon $T_\alpha(t) := \{(x,y) \mid |x-t| < \alpha y,\ 0<y<\infty\}$, missä $\alpha > 0$ ja $t \in \mathbb{R}$. Olkoon $f \in L^1(dt/(1+t^2))$. Asetetaan $u(x,y) := \int_{\mathbb{R}} P_y(s)\, f(x-s)\, ds$. Osoita, että

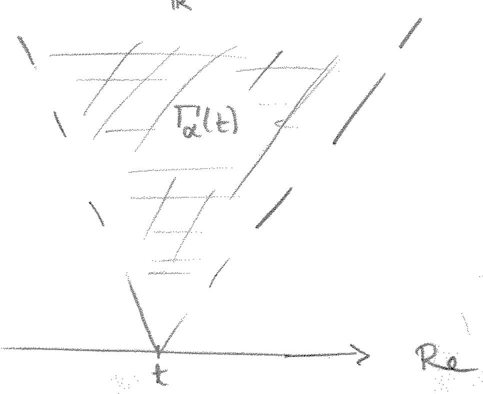
$$\sup_{T_\alpha(t)} |u(x,y)| \le A_\alpha\, (Mf)(t),$$

missä $A_\alpha = 1 + \frac{2\alpha}{\pi}$. [Garnett; Thm I.4.2].

Edellä P_y on ylemmän puolitason Poissonin ydin

$$P_y(s) := \frac{1}{\pi}\, \frac{y}{s^2+y^2}.$$

Koska $f \in L^1(\frac{dt}{(1+t^2)})$, integraali $\int_{\mathbb{R}} P_y(s)\, f(x-s)\, ds$ on hyvin määritelty.



Hardyn-Littlewoodin maksimaalifunktio funktiolle f muodostetaan asettamalla

$$(Mf)(x) := \sup_{x \in I} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)|\, dt,$$

missä $I \subset \mathbb{R}$ on väli ja $|I|$ sen pituus.

Yleisyyden kärsimättä riittää tarkastella ainoastaan notaatioteknisesti yksinkertaista tapausta $t=0$, koska f on mielivaltainen.

Kartion $T_\alpha(0)$ akselin pisteissä $(0,y)$ pätee

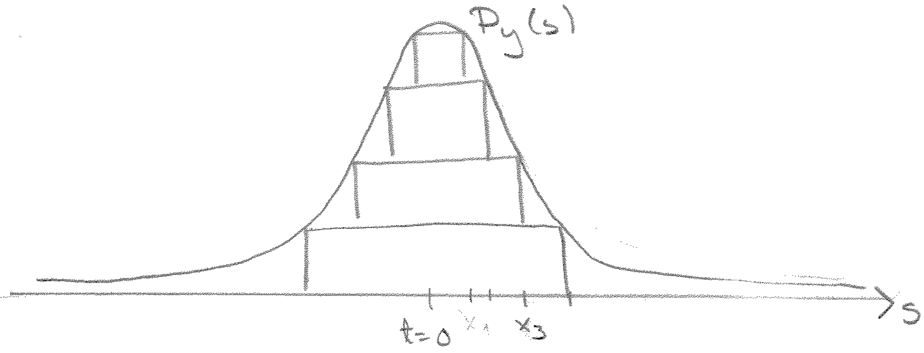
$$u(0,y) = \int_{\mathbb{R}} P_y(s)\, f(s)\, ds$$

ja P_y on positiivinen ja parillinen funktio, laskeva positiivisilla s. Funktio P_y on siis epänegatiivinen* kombinaatio palikkafunktioita

$$\frac{1}{2h}\, \mathbb{1}_{(-h,h)}(s) = \frac{1}{|I|}\, \mathbb{1}_I(s),$$

kun $I = (-h,h)$.

(*jopa konveksi, koska $\int_{\mathbb{R}} P_y(s)\, ds = 1$)



Olkoon $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ jono epänegatiivisia, parillisia ja positiivisilla s väheneviä yksinkertaisia funktioita siten, että $h_n(s) \nearrow P_y(s)$ kun $n \to \infty$. Tällöin

$$h_n(s) = \sum_{k=1}^{N_n} a_k^n \mathbb{1}_{(-x_k^n,\, x_k^n)}(s)$$

missä $a_k^n \geq 0$ ja

$$\int_{\mathbb{R}} h_n(s)\,ds = \sum_{k=1}^{N_n} a_k^n \cdot 2x_k^n \leq 1 = \int_{\mathbb{R}} P_y(s)\,ds.$$

Siispä

$$\left|\int_{\mathbb{R}} h_n(s) f(s)\,ds\right| \leq \int_{\mathbb{R}} h_n(s)\,|f(s)|\,ds$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N_n} a_k^n \cdot 2x_k^n \cdot \frac{1}{2x_k^n}\int_{-x_k^n}^{x_k^n} |f(s)|\,ds$$

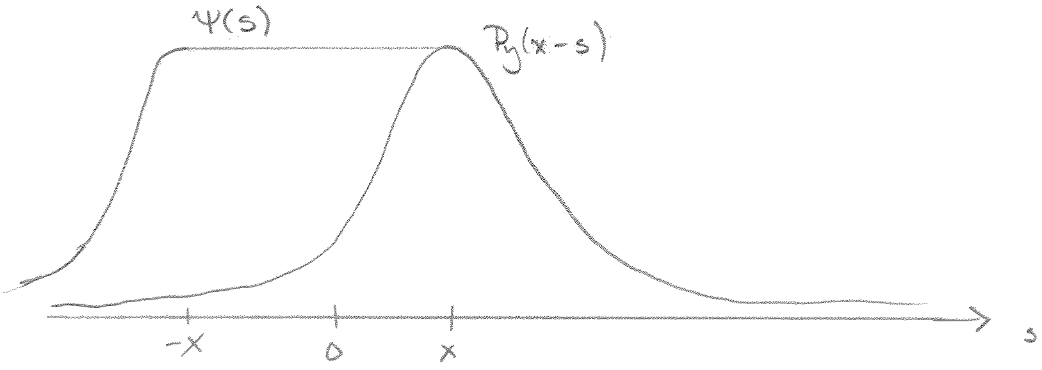
$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_k^n \cdot 2x_k^n \cdot (Mf)(0) \leq (Mf)(0)$$

ja monotonisen konvergenssin lauseen perusteella

$$|u(0,y)| = \left|\int_{\mathbb{R}} P_y(s)\, f(s)\,ds\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} h_n(s)\, f(s)\,ds\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} h_n(s)\,|f(s)|\,ds$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n(s)\,|f(s)|\,ds \leq (Mf)(0).$$



Kiinnitetään sitten $(x,y) \in T_\alpha(0)$. Tällöin $|x| < \alpha y$. Asetetaan

$$\Psi(s) := \sup\{P_y(x-t) : |t| > s\}.$$

Tällöin

$$P_y(x-s) \le \Psi(s)$$

ja Ψ on positiivinen, parillinen ja positiivisilla s vähenevä funktio. Edelleen

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi(s)\,ds = \int_{\mathbb{R}} P_y(x-s)\,ds + \int_{-x}^{x} P_y(0)\,ds$$

$$= 1 + \int_{-x}^{x} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{y}\,ds = 1 + \frac{2x}{\pi y} < 1 + \frac{2\alpha}{\pi} =: A_\alpha .$$

Arvioimalla funktiota Ψ alhaalta askelfunktioilla kuten edellä funktiota P_y saadaan

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi(s)\,|f(s)|\,ds \le A_\alpha\,(Mf)(0)$$

ja siis

$$|u(x,y)| = \left|\int_{\mathbb{R}} P_y(s)\,f(x-s)\,ds\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} P_y(x-s)\,f(s)\,ds\right|$$

$$\le \int_{\mathbb{R}} P_y(x-s)\,|f(s)|\,ds \le \int_{\mathbb{R}} \Psi(s)\,|f(s)|\,ds$$

$$\le A_\alpha\,(Mf)(0) = A_\alpha\,(Mf)(t),$$

kun $t = 0$. $\square$

(HUOM: Alun erityistarkastelua ei lopussa tarvittu kuin yksityiskohtien sivuuttamiseen.)

Mat-1.3301 Kompleksianalyysi DJT 24.4.2007
IV 2006-07

6.2 Alkulukulauseen mukaan, kuinka monta alkulukua on välillä $(10^N, 10^{N+1})$, kun $N \to \infty$? [ch. 15, ex. 2]

Alkulukulauseen mukaan
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\ln(n)} = 1,$$
missä alkulukujen korkeintaan n lukumäärä on $\pi(n)$. Täten
$$\frac{\pi(10^N)}{\pi(10^{N+1})} = \frac{\pi(10^N)}{10^N/\ln(10^N)} \cdot \frac{10^{N+1}/\ln(10^{N+1})}{\pi(10^{N+1})} \cdot \underbrace{\frac{10^N/\ln(10^N)}{10^{N+1}/\ln(10^{N+1})}}_{=\frac{(N+1)}{10N}}$$
$$\xrightarrow[N\to\infty]{} 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{10}.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Tällöin (tarpeeksi suurilla N) pätee
$$\sqrt{1-\varepsilon} \cdot g \leq \frac{\pi(10^{N+1}) - \pi(10^N)}{\pi(10^N)} \leq \sqrt{1+\varepsilon} \cdot g$$
ja edelleen (mahdollisesti vieläkin suuremmilla N)
$$\begin{aligned}(1-\varepsilon) \cdot \frac{g}{\ln 10} \cdot \frac{10^N}{N} &= \sqrt{1-\varepsilon}^2\, g \frac{10^N}{\ln 10^N} \leq \sqrt{1-\varepsilon} \cdot g\, \pi(10^N) \\ &\leq \pi(10^{N+1}) - \pi(10^N) \\ &\leq \sqrt{1+\varepsilon}\, g\, \pi(10^N) \leq \sqrt{1+\varepsilon}^2 \cdot g \frac{10^N}{\ln 10^N} \\ &= (1+\varepsilon) \frac{g}{\ln 10} \cdot \frac{10^N}{N}. \quad \square\end{aligned}$$

6.3 Määritellään Gaussin Ψ-funktio asettamalla
$$\Psi(z) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$
Todista, että funktio Ψ on meromorfinen koko kompleksitasossa $\mathbb{C}$ ja että sillä on navat epäpositiivisilla kokonaisluvuilla. Laske napojen residyt. Näytä, että $\Psi(1) = -\gamma$. Näytä, että
$$\Psi(z) - \Psi(1-z) = -\pi \cot(\pi z). \quad \text{[ch 15, ex. 17]}$$

Γ-funktio on kompleksitasossa meromorfinen. Se ei koskaan häviä [Cor. 15.1.7] ja sillä on yksinkertaiset navat epäpositiivisilla kokonaisluvuilla. Residy pisteessä $-k$ on $(-1)^k/k!$ [Prop. 15.1.4].

Koska funktio Γ on holomorfinen avoimessa joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, myös derivaattafunktio Γ' on [Cor. 3.1.2]. Koska funktio Γ ei häviä on siis myös funktio Ψ holomorfinen joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Olkoon $-k \in \{0, -1, \dots\}$ mielivaltainen. Tällöin funktiolla Γ on yksikäsitteinen Laurentin sarja
$$\Gamma(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n^k (z+k)^n$$
pisteen $-k$ ympäristössä [Prop. 4.3.3] ja $a_{-1}^k = (-1)^k/k!$ [Thm 4.5.3].

Koska pisteen $-k$ ympäristössä
$$\Gamma'(z) = -a_{-1}^k (z+k)^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^k (z+k)^{n-1}$$
ja
$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{-(z+k)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{a_n^k}{a_{-1}^k} (z+k)^n}{1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^k}{a_{-1}^k} (z+p)^{n+1}},$$
on funktiolla Ψ pisteen $-k$ ympäristössä suppeneva Laurentin sarja
$$\Psi(z) = -(z+k)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n^k (z+k)^n .$$
Täten piste $-k$ on funktion Ψ yksinkertainen napa ja residy tässä pisteessä on -1.

Koska (vrt. kaava (15.1.10.1))
$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\ln(\Gamma(z))\right) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z}{j(j+z)},$$
on oltava
$$\Psi(1) = -\gamma - 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} .$$
Em. sarja suppenee, koska $\frac{1}{j(j+1)} \le \frac{1}{j^2}$, joten
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = 1 + \sum_{j=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{j} + \frac{1}{j}\right) = 1.$$
Täten
$$\Psi(1) = -\gamma - 1 + 1 = -\gamma.$$

Siirrytään sitten viimeiseen väitteeseen. Logaritmisen derivaatan avulla
$$\Psi(z) - \Psi(1-z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\log(\Gamma(z)\Gamma(1-z))\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\log(\Gamma(z)\Gamma(-z)(-z))\right).$$
Edelleen
$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -z^2 \prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{j}\right)\left(1-\frac{z}{j}\right) = -z^2 \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right)$$
[Prop. 15.1.9]. Toisaalta
$$-\pi\cot(\pi z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\log\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)\right),$$
joten riittää osoittaa
$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right),$$

johon taas riittää
$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - j^2},$$
koska
$$\begin{aligned}\sin(\pi z) &= \exp\left(\int \pi \cot(\pi z)\, dz \right)\\ &= \exp\left(\int \left(\frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-2z/j^2}{1 - z^2/j^2} \right) dz \right)\\ &= c z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right)\end{aligned}$$
ja
$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = 1.$$

Edetään viimeisimmän väitteen todistamisessa seuraavasti:

- Näytetään, että molemmat funktiot ovat meromorfisia, niillä on yksinkertaiset navat pisteissä $z \in \mathbb{Z}$ ja residy kussakin pisteessä on 1.
- Molemmat funktiot ovat 1-jaksollisia.
- Erotus on rajoitettu kokonainen funktio, jolloin se Liouvillen Lauseen [Thm. 3.4.3] nojalla on vakio.
- Näytetään, että tämä vakio on 0.

HUOM! Vastaavalla prosessilla lienee mahdollista todistaa alkuperäinen haluttu yhtälö myös suoraan, mutta ainakin allekirjoittaneelle kahdessa viimeisessä kohdassa tarvittavat pakkoliikkeet jäivät mysteereiksi, koska Ψ-funktion arvoihin ei ole aivan helppo päästä käsiksi.

Funktiolla

$$\pi\cot(\pi z) = \pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi i\frac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}} = \pi i\frac{e^{2\pi i z}+1}{e^{2\pi i z}-1}$$

on erikoispiste, kun $e^{2\pi i z}=1$ eli $z=n\in\mathbb{Z}$. Tällöin

$$(z-n)\cdot\pi\cot(\pi z) = \pi i(e^{2\pi i z}+1)\cdot\frac{z-n}{e^{2\pi i(z-n)}-1}.$$

Koska

$$\frac{z-n}{e^{2\pi i(z-n)}-1} = \frac{z-n}{\cancel{1}+2\pi i(z-n)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2\pi i)^k}{k!}(z-n)^k-\cancel{1}} \xrightarrow[z\to n]{} \frac{1}{2\pi i},$$

pätee

$$(z-n)\cdot\pi\cot(\pi z)\xrightarrow[z\to n]{}\pi i(1+1)\cdot\frac{1}{2\pi i}=1$$

ja funktiolla $z\longmapsto(z-n)\cdot\pi\cot(\pi z)$ on siis pisteessä n poistuva erikoispiste. Täten funktiolla $z\mapsto\pi\cot(\pi z)$ on ko. pisteessä yksinkertainen napa ja residy on 1.

Funktiolla

$$f(z):=\frac{1}{z}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-j^2}=\frac{1}{z}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+j}+\frac{1}{z-j}\right)$$
$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{j=-N}^{N}\frac{1}{z-j}$$

on erikoispiste, kun $z=n\in\mathbb{Z}$. Pätee

$$(z-n)f(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{j=-N}^{N}\frac{(z-n)}{(z-j)}=\sum_{j=-n+1}^{n-1}\frac{(z-n)}{(z-j)}+\frac{(z-n)}{(z-n)}+\frac{(z-n)}{(z+n)}+\sum_{|j|>|n|}\frac{z-n}{z-j}$$

$$=1+(z-n)\left(\sum_{j=-n+1}^{n-1}\frac{1}{z-j}+\frac{1}{z+n}+\sum_{j>|n|}\frac{2z}{z^2-j^2}\right)\xrightarrow[z\to n]{}1,$$

joten piste $z=n\in\mathbb{Z}$ on myös funktion $z\mapsto(z-n)f(z)$ poistuva erikoispiste ja siis funktion f yksinkertainen napa residyllä 1.

Funktio $z\mapsto\pi\cot(\pi z)$ on 1-jaksollinen, koska $z\mapsto e^{2\pi i z}$ on. Funktiolle f taas pätee

$$f(z+1)-f(z)=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{j=-N}^{N}\frac{1}{\underbrace{z+1-j}_{=z-(j-1)}}-\sum_{j=-N}^{N}\frac{1}{z-j}\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{j=-N-1}^{N-1}\frac{1}{z-j}-\sum_{j=-N}^{N}\frac{1}{z-j}\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{z-(-N-1)}-\frac{1}{z-N}\right)=0,$$

joten myös f on 1-jaksollinen.

Erotus on luonnollisesti holomorfinen funktio, paitsi mahdollisesti napojen ympäristössä. Olkoon $n \in \mathbb{Z}$ mielivaltainen. Tällöin jossakin ko. pisteen ympäristössä pätee

$$f(z) = \frac{1}{z-n} + f_n(z)$$

ja

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z-n} + g_n(z),$$

missä f_n ja g_n ovat holomorfisia. [Prop. 4.3.3, Thm. 4.5.3]. Täten

$$f(z) - \pi \cot(\pi z) = f_n(z) - g_n(z)$$

pisteen n ympäristössä. Oikea puoli on holomorfinen. Koska edellä n oli mielivaltainen, on erotus kokonainen.

Koska molemmat funktiot ovat 1-jaksollisia, on myös erotus sitä, joten riittää osoittaa rajoittuneisuus nauhassa $|\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}$. Edelleen erotus on kokonaisena funktiona rajoitettu jokaisessa rajoitetussa joukossa, joten riittää tarkastella ko. nauhan "päitä" eli tapausta $|\mathrm{Im}(z)| \geq 1$. Kolmioepäyhtälön nojalla taas riittää osoittaa kumpikin erotettava rajoitetuksi ko. joukossa.

Koska $|e^{2\pi i(x+iy)} + 1| \leq e^{-2\pi y} + 1$ ja

$|e^{2\pi i(x+iy)} - 1| \geq ||e^{-2\pi y}| - |1|| = |e^{-2\pi y} - 1|$, saadaan

$$|\cot(\pi(x+iy))| \leq \frac{1 + e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} < \frac{1 + 1/2}{1 - 1/2} = 3,$$

kun $y \geq 1 > \frac{1}{2\pi}\ln(2)$ eli $e^{-2\pi y} < 1/2$ ja

$$|\cot(\pi(x+iy))| \leq \frac{1 + e^{-2\pi y}}{e^{-2\pi y} - 1} \leq \frac{1/2\, e^{-2\pi y} + e^{-2\pi y}}{e^{-2\pi y} - 1/2\, e^{-2\pi y}} = 3,$$

kun $y \leq -1 < -\frac{1}{2\pi}\ln(2)$ eli $e^{-2\pi y} > 2$. Siispä

$$|\pi \cot(\pi z)| \leq 3\pi,$$

kun $|\mathrm{Re}(z)| \leq 1/2$ ja $|\mathrm{Im}(z)| \geq 1$.

Olkoon edelleen $|x| \le 1/2$ ja $|y| \ge 1$.
Tällöin
$$f(x+iy) = \frac{1}{x+iy} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2(x+iy)}{x^2-y^2-j^2+2xyi}$$
ja siis
$$|f(x+iy)| \le \frac{1}{|y|} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{\underbrace{(x^2-y^2-j^2)^2+4x^2y^2}_{=(j^2+y^2-x^2)^2}}}$$

$$\le \frac{1}{1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{y^2+y^2}}{\sqrt{(j^2+y^2-1/2y^2)^2+0}} \le 1+\sum_{j=1}^{\infty} \frac{3|y|}{j^2+1/2y^2}$$

$$= 1+\sum_{j=1}^{\infty} \frac{6|y|}{2j^2+y^2} \le 1+6\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|y|}{\underbrace{j^2+y^2}_{\ge 2|j||y|}}$$

$$\le 1+6\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|y|}{\frac{1}{2}(n+|y|)^2}$$

$$\le 1+12|y|\int_{|y|}^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = 1+12|y|\cdot\frac{1}{|y|} = 13.$$

Täten siis
$$\pi\cot(\pi z) - f(z) \equiv C = \text{vakio}.$$
Koska
$$\pi\cot(\pi\cdot iy) = \pi i\,\frac{e^{2\pi i\cdot iy}+1}{e^{2\pi i\cdot iy}-1} = \pi i\,\frac{e^{-2\pi y}+1}{e^{-2\pi y}-1} \xrightarrow[y\to\infty]{} \pi i\,\frac{0+1}{0-1} = -\pi i$$
ja
$$f(iy) = \frac{1}{iy} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{2iy}{(iy)^2-j^2} = \frac{1}{yi} - 2i\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(\frac{j}{y})^2+1}\cdot\frac{1}{y}}_{\text{integraalin } \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}dt \text{ Riemannin alasumma}}$$

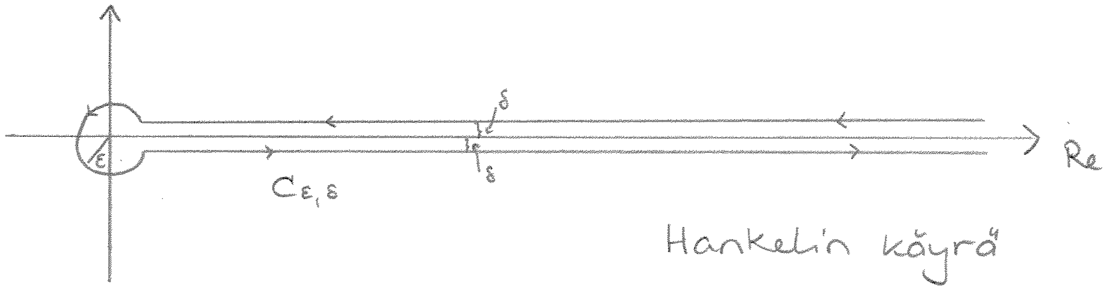
$$\xrightarrow[y\to\infty]{} 0 - 2i\int_0^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt \qquad t=\tan\varphi,\quad dt=\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi$$

$$= -2i\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = -2i\int_0^{\pi/2} 1\,d\varphi = -\pi i,$$

on oltava $C=0$. □

6.4 Näytä, että jos $\mathrm{Re}(z) > 1$, niin
$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i\sin(\pi z)} \int_{C_1} e^{-w}(-w)^{z-1}\,dw,$$
missä C_1 on Hankelin käyrä. [ch. 15, ex. 21]

HUOM! Kirjan vanhassa painoksessa (ja siten myös tehtävänannossa) on painovirheitä.



Hankelin käyrä

Tarkasteltava integraali suppenee samasta syystä kuin alkuperäinen Γ-funktion integraali suppenee (vrt. luvun 15.1 alku).
Jaetaan integraali osiin
$$\int_{C_{\varepsilon,\delta}} e^{-w}(-w)^{z-1}\,dw =$$
$$\int_{\infty}^{\tilde{\varepsilon}} e^{-(t+i\delta)}\, e^{(z-1)\ln(-(t+i\delta))}\,dt \;+$$
$$\int_{\tilde{\delta}}^{2\pi-\tilde{\delta}} e^{-\varepsilon e^{i\theta}}\, e^{(z-1)\ln(\overbrace{-\varepsilon e^{i\theta}}^{=e^{-i\pi}\cdot\varepsilon e^{i\theta}})}\,\varepsilon e^{i\theta}\, i\,d\theta \;+$$
$$\int_{\tilde{\varepsilon}}^{\infty} e^{-(t-i\delta)}\, e^{(z+1)\ln(-(t-i\delta))}\,dt \;=: I_1 + I_2 + I_3.$$

Nyt
$$|I_2| \le \int_{\tilde{\delta}}^{2\pi-\tilde{\delta}} \Big|\underbrace{e^{-\varepsilon e^{i\theta}}}_{|\,|=e^{-\varepsilon\cos\theta}}\;\underbrace{e^{(z-1)(\ln(\varepsilon)+i(\theta-\pi))}}_{|\,|=e^{\mathrm{Re}(\dots)}=e^{\mathrm{Re}(z-1)\ln(\varepsilon)-\mathrm{Im}(z)(\theta-\pi)}=\varepsilon^{\mathrm{Re}(z-1)}e^{-\mathrm{Im}(z)(\theta-\pi)}}\;\underbrace{ie^{i\theta}}_{|\,|=1}\Big|\cdot\varepsilon\,d\theta$$
$$= \int_{\tilde{\delta}}^{2\pi-\tilde{\delta}} \underbrace{\varepsilon^{\mathrm{Re}(z-1)+1}}_{\le\varepsilon^{\mathrm{Re}(z)}}\;\underbrace{e^{-\mathrm{Im}(z)(\theta-\pi)}}_{=(e^{\pm(\theta-\pi)})^{\mp\mathrm{Im}(z)}\le C^{|\mathrm{Im}(z)|}\le C^{|z|}}\;\underbrace{e^{-\varepsilon\cos\theta}}_{\le e^{\varepsilon}}\,d\theta$$
$$\le C^{|z|+1}\,\varepsilon^{\mathrm{Re}(z)}\,(2\pi-2\tilde{\delta}) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$
koska $\mathrm{Re}(z) > 0$. Edellä C oli joka kohdassa jokin vakio, mutta ei koko ajan sama.

Siispä $\lim_{\varepsilon \to 0} I_2 = 0$.

Argumentin haarat kohdilleen laittamalla saadaan

$$\ln(-(t+i\delta)) = \ln\left(\sqrt{t^2+\delta^2}\, e^{i(\arctan(\frac{\delta}{t})-\pi)}\right)$$
$$= \ln\sqrt{t^2+\delta^2} + i(\arctan(\tfrac{\delta}{t})-\pi)$$
$$\xrightarrow{\delta \searrow 0} \ln t - i\pi$$

ja

$$\ln(-(t-i\delta)) = \ln\left(\sqrt{t^2+\delta^2}\, e^{i(-\arctan(\frac{\delta}{t})+\pi)}\right)$$
$$= \ln\sqrt{t^2+\delta^2} + i(-\arctan(\tfrac{\delta}{t})+\pi)$$
$$\xrightarrow{\delta \searrow 0} \ln t + i\pi .$$

Rajallahan näillä kahdella on oltava vaihe-ero $2\pi i$.

Täten

$$I_1 + I_3 \xrightarrow{\delta \searrow 0} \int_{\infty}^{\tilde{\varepsilon}} e^{-t} e^{(z-1)(\ln t - i\pi)}\, dt + \int_{\tilde{\varepsilon}}^{\infty} e^{-t} e^{(z-1)(\ln t + i\pi)}\, dt$$
$$= \int_{\tilde{\varepsilon}}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \left(-e^{(z-1)(-i\pi)} + e^{(z-1)i\pi}\right) dt$$
$$= \int_{\tilde{\varepsilon}}^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt \left(-2i\, \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i}\right)$$
$$\xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} -2i \sin(\pi z)\, \Gamma(z)$$

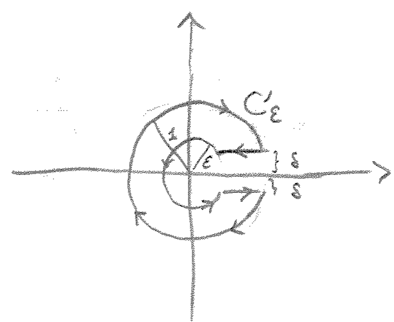
ja siis

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i\sin(\pi z)} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \lim_{\delta \searrow 0} \int_{C_{\varepsilon,\delta}} e^{-w} (-w)^{z-1}\, dw$$
$$= -\frac{1}{2i\sin(\pi z)} \int_{C_1} e^{-w} (-w)^{z-1}\, dw,$$

koska $C_1 = C_{\varepsilon,\delta} + C'_{\varepsilon}$ ja Cauchyn integraalilauseen nojalla

$$\int_{C'_\varepsilon} e^{-w} (-w)^{z-1}\, dw = 0,$$

koska integrandi on holomorfinen käyrän C'_ε sisällä.



$\square$

6.5 Todista, että
$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}-e^{-1/t}}{t}\,dt \,. \qquad \text{[ch. 15, ex. 26]}$$

Tehtävän 3 perusteella tiedetään, että
$$\gamma = -\Gamma'(1) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt\right)\Big|_{z=1}$$
$$= -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z}\left(t^{z-1}e^{-t}\right)\Big|_{z=1}dt$$
$$= -\int_0^\infty \left(\ln(t)\, t^{z-1}e^{-t}\right)_{z=1}dt$$
$$= -\int_0^\infty \ln(t)\,e^{-t}\,dt \,.$$
Derivoinnin ja integroinnin järjestystä voi tässä jatkuvuuden nojalla huoletta vaihtaa.

Olkoon sitten $\varepsilon > 0$. Osittain integroimalla saadaan
$$-\int_\varepsilon^\infty \ln(t)e^{-t}dt = \Big/_{\!\varepsilon}^{\infty} e^{-t}\ln(t) - \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt$$
$$= \Big/_{\!\varepsilon}^{1} e^{-t}\ln(t) + \underbrace{\Big/_{\!1}^{\infty} e^{-t}\ln(t)}_{=0} - \int_\varepsilon^1 \frac{e^{-t}}{t}dt - \underbrace{\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt}_{s=1/t,\ ds=-\frac{1}{s^2}}$$
$$= e^{-\varepsilon}\Big/_{\!\varepsilon}^{1}\ln(t) - \int_\varepsilon^1 \frac{e^{-t}}{t}dt + \int_1^0 \frac{e^{-1/t}}{t}dt$$
$$= \int_\varepsilon^1 \frac{e^{-\varepsilon}-e^{-t}}{t}dt - \int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t}dt \,,$$
joten
$$\gamma = \lim_{\varepsilon\to 0} -\int_\varepsilon^\infty \ln(t)e^{-t}dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{e^{-\varepsilon}-e^{-t}}{t}dt - \int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t}dt$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} e^{-\varepsilon}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1-e^{-t}}{t+\varepsilon}dt - \int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t}dt$$
$$= \int_0^1 \frac{1-e^{-t}-e^{-1/t}}{t}dt \,. \qquad \square$$