1. LET $0 < p \leq \infty$ AND LET f BE HOLOMORPHIC ON THE UNIT DISC D. PROVE THAT $f \in H^p(D)$ IF AND ONLY IF THERE IS A HARMONIC FUNCTION u IN D SUCH THAT $|f(z)|^p \leq u(z)$, $z \in D$.

2. ASSUME THAT $f \in H^p(D)$, $p \in (0,\infty)$. SHOW THAT ONE CAN WRITE

$$f = gh, \quad \text{WITH} \quad g, h \in H^{2p}(D).$$

3. SHOW THAT IF $f(z)$ IS ANALYTIC IN $|z| < 1$ AND ITS RANGE IS CONTAINED IN A SECTOR OF ANGLE $\alpha \in (0, 2\pi]$, THEN $f \in H^p$, FOR EVERY $p < \frac{\pi}{\alpha}$.

4. IF $g(z)$ IS BOUNDED AND ANALYTIC IN THE ANGLE

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z \in D \;\middle|\; \frac{|1-z|}{1-|z|} < \alpha \right\} \qquad \alpha > 1$$

AND IF $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = a$, THEN IN ANY SMALLER ANGLE Γ', $\lim\limits_{\substack{z \in \Gamma' \\ z \to 1}} g(z) = a$.

PROVE THIS STATEMENT.

5. SUPPOSE $f \in L^1(\partial D)$. LET F BE THE CAUCHY INTEGRAL ($F(z)$ DEFINED FOR $|z|<1$). DOES IT FOLLOW THAT $F \in H^1(D)$? IF NOT, WHAT ASSUMPTIONS ON f ARE SUFFICIENT TO MAKE THE ANSWER AFFIRMATIVE?

5.1. Olkoon $0 < p \leq \infty$ ja olkoon funktio f holomorfinen yksikkökiekolla D. Todista, että $f \in H^p(D)$, jos ja vain jos on olemassa harmoninen funktio u kiekolla D siten, että $|f(z)|^p \leq u(z)$, $z \in D$. [ch. 13, ex. 5+]

"<=" Olkoon olemassa harmoninen funktio $u : D \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ siten, että

$$|f(z)|^p \leq u(z),$$

kun $z \in D$. Tällöin, kun $0 < r < 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \, d\theta = u(0)$$

[Thm 7.2.5]. Siispä

$$\sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} \leq u(0)^{1/p} < \infty$$

ja $f \in H^p(D)$.

"=>" Oletetaan sitten, että $f \in H^p(D)$. Tällöin kullakin $0 < r < 1$

$$|f(r\,\cdot)|^p \in C(\partial D)$$

ja siis on olemassa harmoninen funktio u_r kiekolla $D(0,r)$, joka yhtyy reunalla $\partial D(0,r)$ funktioon $|f|^p$ [Thm 7.3.4]*. Koska funktio $|f|^p$ on aliharmoninen (koska $z \mapsto \log|z|$ on ja $x \mapsto \exp(px)$ on kasvava ja konveksi [vrt. Ex. 7.7.6]) pätee tällöin

$$|f(z)| \leq u_r(z),$$

kun $z \in D(0,r)$ [Def. 7.7.2].

* ja joka on jatkuva joukossa $\bar{D}(0,r)$.

Olkoon sitten $r_1 < r_2$. Reunalla $\partial D(0, r_1)$

$$u_{r_1}(z) = |f(z)|^p \leq u_{r_2}(z),$$

joten harmonisten funktioiden maksimiperiaatteen nojalla

$$u_{r_1}(z) \leq u_{r_2}(z)$$

kaikilla $z \in \overline{D}(0, r_1)$.

Olkoon $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,1)$ mielivaltainen jono, $r_n \nearrow 1$. Tällöin $(u_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ on kasvava harmonisten funktioiden jono kiekolla $D(0, r_1)$. Koska

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_{r_n}(re^{i\theta})\,d\theta = u_{r_n}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_{r_n}(r_n e^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r_n e^{i\theta})|^p\,d\theta \leq \|f\|_{H^p(D)},$$

kun $r \in (0, r_1)$, ei voi olla $u_{r_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ normaalisti, joten on olemassa kiekolla $D(0, r_1)$ harmoninen funktio $\tilde{u}_{r_1}$ siten, että $\lim_{n\to\infty} u_{r_n} = \tilde{u}_{r_1}$ normaalisti kiekolla $D(0, r_1)$ [Thm 7.6.3] ja $|f(z)|^p \leq \tilde{u}_{r_1}(z)$, kun $z \in \overline{D}(0, r_1)$.

Induktiivisesti saadaan jono $(\tilde{u}_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ harmonisia funktioita kiekoilla $(D(0, r_n))_{n=1}^{\infty}$. Edelleen

$$\tilde{u}_{r_k}(z) = \tilde{u}_{r_\ell}(z),$$

kun $z \in D(0, r_{k \wedge \ell})$. Rajafunktiona u saadaan harmoninen funktio yksikkökiekolla ja pätee

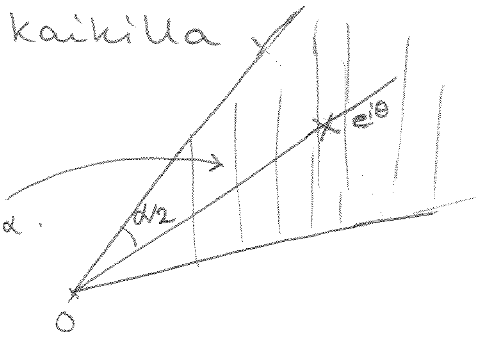
$$|f(z)|^p \leq u(z),$$

kun $z \in D(0, 1)$. $\square$

5.2 Oletetaan, että $f \in H^p(D)$ ja $p \in (0,\infty)$. Näytä, että voidaan kirjoittaa
$$f = gh,$$
missä $g, h \in H^{2p}(D)$. [ch. 13, ex. 8]

Tutusti on olemassa $F \in H^p(D)$, $F(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$, ja $G \in H^\infty(D)$ siten, että $f = F \cdot G$ [Thm 13.3.5]. Koska F ei häviä, voidaan sen neliöjuuri määritellä holomorfiseksi. Siispä
$$f = F^{1/2} \cdot F^{1/2} G,$$
missä $F^{1/2} \in H(D)$ ja $F^{1/2} G \in H(D)$. Koska $F \in H^p(D)$, luonnollisesti siis
$$\| F^{1/2} \|_{H^{2p}(D)} = \| F \|_{H^p(D)}^{1/2} < \infty$$
ja
$$\| F^{1/2} G \|_{H^{2p}(D)} \le \| F^{1/2} \|_{H^{2p}(D)} \| G \|_{H^\infty(G)} < \infty . \quad \square$$

5.3 Näytä, että jos $f \in H(D)$ ja sen kuva sisältyy kulman $\alpha \in (0, 2\pi]$ sektoriin, niin $f \in H^p(D)$ kaikilla $p < \frac{\pi}{\alpha}$.



Merkitään ko. sektoria $T_{\theta,\alpha}$.

Toteutetaan todistus seuraavissa osissa:

(I) On olemassa (sopiva) holomorfinen funktio F siten, että $f = F \circ \omega$ jollakin holomorfisella $\omega : D \to D$ ja $\omega(0) = 0$.

(II) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p \, d\varphi \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(re^{i\varphi})|^p \, d\varphi$ kaikilla $0<r<1$ ja $0 < p \le \infty$.

(III) Pätee $F \in H^p(D)$ kaikilla $0 < p < \frac{\pi}{\alpha}$.

(I) Tätä varten riittää löytää yksikkö-kiekon ja sektorin $T_{\theta,\alpha}$ välinen konformikuvaus F siten, että $f(0) = F(0)$. Tällöin asettamalla $\omega := F^{-1} \circ f$ saadaan $\omega \in H(D)$ ja $\omega(0) = 0$.

Toteutetaan konformikuvaus osissa:

– Kuvataan yksikkökiekko konformisesti itselleen siten, että

piste 0 kuvautuu "sopivasti".
(Tämä on mahdollista, koska
$\varphi_a(0) = +a$, kun $\varphi_a(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$,
ja φ_a on kiekon D konformikuvaus itselleen, kun $|a|<1$.)

- Kuvataan yksikkökiekko konformisesti ylempään puolitasoon Cayleyn muunnoksen käänteismuunnoksella
$$z \xrightarrow{c^{-1}} i\,\frac{1+z}{1-z}.$$
- Kuvataan ylempi puolitaso sektoriksi $T_{\theta,\alpha}$ kuvauksella
$$z \xrightarrow{g} \left(e^{-i\pi/2} z\right)^{\alpha/\pi} \cdot e^{i\theta}.$$
(Tämä on luonnollisesti holomorfinen bijektio.)

Nyt em. "sopivasti" on siis siten, että
$$f(0) = F(0) = (g \circ c^{-1} \circ \varphi_a)(0) = (g \circ c^{-1})(+a)$$
eli
$$a = +(c \circ g^{-1} \circ f)(0) \in D.$$

(Huom. Kohtaa III ajatellen tämä vaikuttaa lupaavalta, koska kuvaus g tuo mukaan eksponentin α/π ja $p \cdot \alpha/\pi < 1$, kun $p < \pi/\alpha$ ...)

(II) Nyt Schwarzin lemman [Prop. 5.5.1] perusteella
$$|w(z)| \le |z|$$
kaikilla $z \in D$. Olkoon $0<r<1$.

Tästä eteenpäin tällä lauseella on nimikin: Littlewood's subordinate theorem.

Hardy ja Littlewood olivat aikanaan läheisiä työtovereita.

Koska $F \in H(D)$, on $|F|^p$ ali-harmoninen yksikkökiekolla. Olkoon U sellainen kiekolla $D(0,r)$ harmoninen funktio, että $U|_{\partial D(0,r)} = |F|^p|_{\partial D(0,r)}$. Tällöin määritelmän [Def. 7.7.2] mukaisesti $|F(z)|^p \le U(z)$ kaikilla $z \in D(0,r)$.

Asetetaan $u := U \circ w$. Funktio u on holomorfisen ja harmonisen funktion yhdisteenä harmoninen. Edelleen pätee
$$|f(z)|^p = |F(w(z))|^p \le U(w(z)) \le u(z),$$
kun $z \in \partial D(0,r)$, koska tällöin
$$|w(z)| \le |z| = r.$$

Yhdistäen edelliset keskiarvoperiaatteeseen [Thm 7.2.5] saadaan
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi})d\varphi = u(0)$$
$$= U(w(0)) = U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(re^{i\varphi})d\varphi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(re^{i\varphi})|^p d\varphi.$$

(Huom: Yleisemminkin edellinen siis toimii millä tahansa funktioilla g ja aliharmoninen G siten, että $g = G \circ w$.)

III Jäljellä on siis osoittaa, että
$$\sup_{0<r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(re^{i\varphi})|^p d\varphi\right)^{1/p} = \lim_{r\nearrow 1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(re^{i\varphi})|^p d\varphi\right)^{1/p} \quad \text{[Thm 13.3.1]}$$
on äärellinen, kun $p<\pi/\alpha$.

Kohdan I perusteella funktio F on muotoa $g\circ C^{-1}\circ\varphi_{-a}$, missä
$$\varphi_{-a}(z)=\frac{z+a}{1+\bar a z},$$
$$C^{-1}(z)=i\,\frac{1+z}{1-z}$$
$$g(z)=\left(e^{-i\pi/2}\,z\right)^{\alpha/\pi}\cdot e^{i\theta}.$$
Tavoiteltavan tuloksen kannalta funktiota F kertova vakio ei ole merkitsevä, joten oleellisesti on tarkasteltava funktiota
$$z\longmapsto\left(\frac{1+\frac{z+a}{1+\bar a z}}{1-\frac{z+a}{1+\bar a z}}\right)^{\alpha/\pi}=\left(\frac{1+\bar a z+z+a}{1+\bar a z-z-a}\right)^{\alpha/\pi}$$
$$=\left(\frac{z\,\overline{(a+1)}+(a+1)}{z\,\overline{(a-1)}-(a-1)}\right)^{\alpha/\pi}.$$

Tällä on yksikkökiekon reunalla yksinkertainen napa pisteessä
$$z=\frac{a-1}{\overline{a-1}}=\frac{(a-1)^2}{|a-1|^2},$$
koska ei ole olemassa sellaista $a\in D$ ($|a|<1$), että $-\frac{(a+1)^2}{|a+1|^2}=\frac{(a-1)^2}{|a+1|^2}$.

Jos a kirjoitetaan muodossa $a=x+iy$, on kyseessä (kummankin suhteen) neljännen asteen polynomi, jolla ei ole reaaliratkaisuja, kun $x^2+y^2<1$:

```
Solve[(x + y I - 1) ^2 ((x + 1) ^2 + y^2) + (x + y I + 1) ^2 ((x - 1) ^2 + y^2) == 0, x]
```
$\{\{x\to -i(-i+y)\},\ \{x\to -i(i+y)\},\ \{x\to -\sqrt{1-y^2}\},\ \{x\to \sqrt{1-y^2}\}\}$

```
Solve[(x + y I - 1) ^2 ((x + 1) ^2 + y^2) + (x + y I + 1) ^2 ((x - 1) ^2 + y^2) == 0, y]
```
$\{\{y\to i(-1+x)\},\ \{y\to i(1+x)\},\ \{y\to -\sqrt{1-x^2}\},\ \{y\to \sqrt{1-x^2}\}\}$

Tälläinen yksinkertainen singulariteetti on integroituva, jos $p \cdot \alpha/\pi < 1$ eli siis $p < \pi/\alpha$. Vastaavasti se ei integroidu, jos $p \cdot \alpha/\pi \geq 1$.

Siis $F \in H^p(D)$, jos ja vain jos $p < \pi/\alpha$. $\square$

5.4 Jos g on holomorfinen ja rajoitettu sektorissa

$$\Gamma := \left\{ z \in D : \frac{|1-z|}{1-|z|} < \alpha \right\},$$

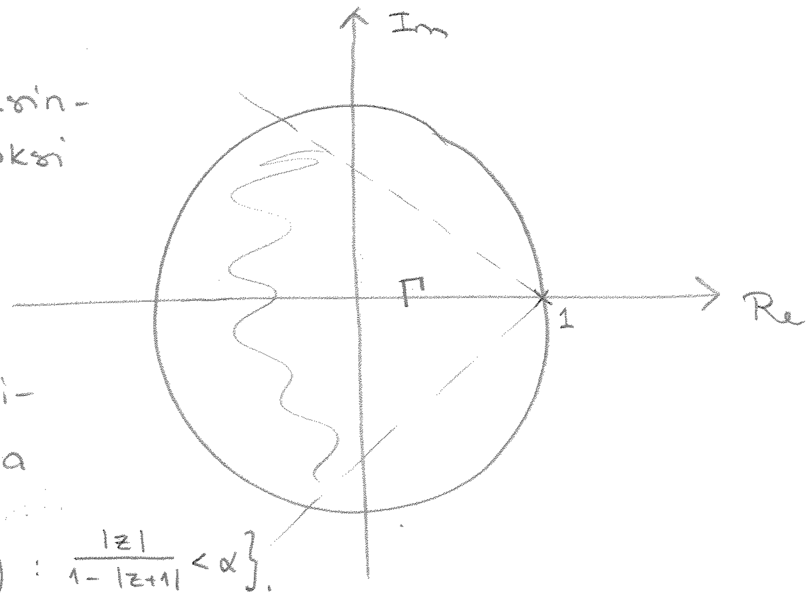
$\alpha > 1$, ja jos

$$\lim_{x \nearrow 1} g(x) = a,$$

niin tällöin missä tahansa pienemmässä sektorissa Γ'

$$\lim_{\substack{z \in \Gamma' \\ z \to 1}} g(z) = a.$$

Todista tämä. [Garnett, ch. 1, ex.5]



Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi funktiota

$$f(\cdot) := g(\cdot + 1),$$

joka on holomorfinen ja rajoitettu sektorissa

$$\tilde{\Gamma} := \Gamma - 1 = \left\{ z \in D(-1,1) : \frac{|z|}{1-|z+1|} < \alpha \right\}.$$

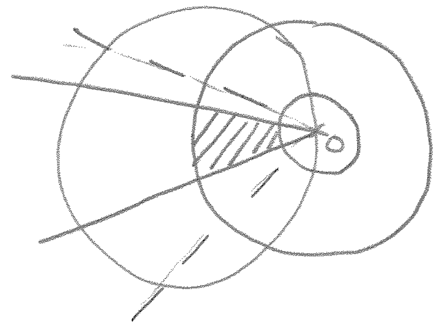
Tällöin luonnollisesti

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} g(x+1) = a.$$

Olkoon $\tilde{\Gamma}' \subsetneq \tilde{\Gamma}$ mielivaltainen pienempi sektori (jota luonnollisesti vastaa yhtä mielivaltainen $\tilde{\Gamma}' + 1 =: \Gamma' \subsetneq \Gamma$.) Asetetaan $f_n(z) := f(z/n)$, $z \in \tilde{\Gamma}$. Koska f on rajoitettu, ovat funktiot $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tasaisesti rajoitettuja. Montelin lauseen* perusteella on siis olemassa osajono $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, joka suppee tasaisesti kompakteilla osajoukoilla holomorfiseen funktioon F.

* [Thm 6.5.3]

Erityisesti näin tapahtuu siis joukossa $\overline{\tilde{\Pi}'} \cap D^c(0,\varepsilon) \cap \overline{D}(0,1)$ mielivaltaisella $\varepsilon \in (0,1)$. Nyt kuitenkin kaikilla $x \in [-1,-\varepsilon] \subset \overline{\tilde{\Pi}'} \cap D^c(0,\varepsilon) \cap \overline{D}(0,1)$ pätee



$$f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f(x/n) = a,$$

joten

$$F(x) = a$$

kaikilla $[-1,-\varepsilon]$ ja siis $F \equiv a$ [Cor. 3.6.3]. Edelleen $f_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ tasaisesti kaikilla $z \in \overline{\tilde{\Pi}'} \cap D^c(0,\varepsilon) \cap \overline{D}(0,1)$, joten

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ z\in\tilde{\Pi}'}} f(z) = a. \qquad \square$$

Huom! Tasainen suppeneminen kompaktissa joukossa on edellä ehdottoman välttämätöntä, jotta lopulta saadaan suppeneminen muitakin kuin säteittäisiä polkuja pitkin.

5.5 Oletetaan, että $f \in L^1(\partial D)$. Olkoon F tämän Cauchyn integraali. (Funktio F on luonnollisesti määritelty kiekossa D.) Päteekö tällöin $F \in H^1(D)$? Jos näin ei ole, mitkä oletukset funktiosta f ovat riittäviä tekemään väitteestä toden? [ch. 13, ex. 7]

Kirjoitetaan aluksi funktio F auki:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \overset{\zeta = e^{i\theta}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta}) e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1 - e^{-i\theta} z} d\theta, \quad \text{kun } z \in D.$$

Ensinnäkin, jos $F \in H^1(D)$, on olemassa $\tilde{f} \in L^1(\partial D)$ siten, että

(i) $\|\tilde{f}\|_{L^1(\partial D)} = \|F\|_{H^1(D)}$,

(ii) $\lim_{r \nearrow 1} \|\tilde{f} - F_r\|_{L^1(\partial D)} := \lim_{r \nearrow 1} \|\tilde{f} - f(r\cdot)\|_{L^1(\partial D)} = 0$

ja

(iii) $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{\tilde{f}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

kaikilla $z \in D$. [Thm 13.4.9]

Koska residyjä laskien kuitenkin

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{1/\zeta}{\zeta - z} d\zeta \equiv 0, \qquad (*)$$

kun $z \in D$, ja

$$\|1/\cdot\|_{L^1(\partial D)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |1/e^{i\theta}| d\theta = 1 < 0,$$

funktiota $F \in H^1(D)$ $\underline{\underline{\text{ei}}}$ siis vastaa yksikäsitteinen $f \in L^1(\partial D)$.

Yhtälö (*) yhdessä määritelmien ja holomorfisten funktioiden Cauchyn integraalikaavan kanssa antaa kuitenkin seuraavan tuloksen:

> Jos funktiolla f on (vähintään) joukolla ∂D suppeneva Laurentin sarja, niin $F \in H^1(D)$.

Koska $\bar{z} = 1/z$, kun $z \in \partial D$, em. tulos sisältää ylipäätään kaikki tekijöiden z ja $\bar{z}$ suppenevina sarjoina esitettävissä olevat funktiot f.

Vastaesimerkkiä alkuperäiseen kysymykseen on siis etsittävä sellaisten funktioiden $f \in L^1(\partial D)$ joukosta, joita ei voi esittää pelkästään muuttujan z ja sen komplementin suppenevan sarjan avulla tai jolla on eristämättömiä erikoispisteitä kiekolla D.

Seuraavalla sivulla on kuvattu yksikäsitteisesti Hardyn funktioiden reunafunktiot. On siis kuitenkin olemassa sellaisia L^1-funktioita, jotka antavat kyllä Cauchyn integraalikaavalla H^1-funktion, mutta $\tilde{f} \neq f$. Esimerkiksi funktion $z \mapsto 1/z$ Fourierin kertoimet ovat $c_{-1} = 1$, $c_n = 0$ muilla n.

Seuraava karakterisaatio lienee joka tapauksessa hyödyllinen:

Jos $F \in H^1(D)$, $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ja $(\tilde{c}_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ ovat rajafunktion $\tilde{f}(e^{i\theta}) = \lim_{r \nearrow 1} F(re^{i\theta})$ Fourierin kertoimet, niin $c_n = a_n$, kun $n \geq 0$, ja $c_n = 0$, kun $n < \infty$.
Toisaalta, jos $f \in L^1(\partial D)$ ja sen Fourierin kertoimille $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ pätee $c_n = 0$, kun $n < 0$, niin tällöin $F \in H^1(D)$, kun $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, $z \in D$, ja $\lim_{r \nearrow 1} F(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ m.k.

Todistetaan ensin ensimmäinen väite:

Potenssisarjan kertoimille $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ pätee

$$a_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,r)} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - 0)^{n+1}} d\zeta$$

kaikilla $r \in (0,1)$. Holomorfisten funktioiden maksimiperiaatteen [Cor. 5.4.3] ja dominoidun konvergenssin lauseen perusteella tällöin

$$\begin{aligned}
a_n &= \lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,r)} \frac{F(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \\
&= \lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{F(r\zeta)}{r^{n+1} \zeta^{n+1}} r \, d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \left(\lim_{r \nearrow 1} \frac{F(r\zeta)}{r^{n} \zeta^{n+1}} \right) d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{\tilde{f}(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \\
&\overset{(*)}{=} \tilde{c}_n,
\end{aligned}$$

kun muistetaan vielä Fourierin kerrointen määritelmä (*).

Vastaavasti, kun $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\tilde{c}_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta})\, e^{in\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \tilde{f}(\varsigma)\, \varsigma^{n-1}\, d\varsigma$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \lim_{r \nearrow 1} \left(F(r\varsigma)\, (r\varsigma)^{n-1}\, r\right) d\varsigma$$

$$= \lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} F(r\varsigma)\, (r\varsigma)^{n-1}\, d(r\varsigma)$$

$$= \lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,r)} F(\varsigma)\, \varsigma^{n-1}\, d\varsigma = \lim_{r\nearrow 0} 0 = 0,$$

koska integrandi on holomorfinen.

Siirrytään sitten jälkimmäiseen väitteeseen:

Asetetaan,

$$F(z) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - \varphi)\, f(\varphi)\, d\varphi,$$

kun $z = re^{i\theta}$. Edellä P_r Poissonin ydin

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2}.$$

Tällä on sarjaesitys

$$P_r(\theta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{in\theta} + e^{-in\theta}),$$

joten

$$F(re^{i\theta}) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi}_{=c_0} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \Big[e^{in\theta} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} f(\varphi)\, d\varphi}_{=c_n} + e^{-in\theta} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\varphi} f(\varphi)\, d\varphi}_{=c_{-n} = 0} \Big]$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (re^{i\theta})^n.$$

Siispä $F \in H(D)$, koska

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |e^{-in\varphi} f(\varphi)|\, d\varphi = \|f\|_{L^1(\partial D)}.$$

Koska, kun $r \in (0,1)$,

$$\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) P_r(\theta-\varphi)\, d\varphi \right| d\theta$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})| \underbrace{P_r(\theta-\varphi)}_{\geq \frac{1-r^2}{1-2r+r^2} = \frac{1+r}{1-r} > 0} d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})| \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta-\varphi)\, d\theta}_{=1,\ \text{koska } (z \mapsto 1) \in H(D)} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})|\, d\varphi,$$

on oltava

$$\|F\|_{H^1(D)} = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|\, d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})|\, d\varphi = \|f\|_{L^1(\partial D)} < \infty$$

ja siis $F \in H^1(D)$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Jatkuvat funktiot ovat tiheässä avaruudessa $L^1(\partial D)$ [esim. Rudin Thm 3.14], joten on olemassa $g \in C(\partial D)$ siten, että $\|g - f\|_1 < \varepsilon$. Merkitään $G(re^{i\theta}) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{i\varphi}) P_r(\theta - \varphi)\, d\varphi$, $F_r := F(r\,\cdot)$ ja $G_r := G(r\,\cdot)$. Tällöin

$$F_r - f = (F_r - G_r) + (G_r - g) + (g - f).$$

Vastaavasti kuin sivun ylälaidassa

$$\|F_r - G_r\|_{L^1(\partial D)} \leq \|f - g\|_{L^1(\partial D)} < \varepsilon,$$

joten

$$\|F_r - f\|_{L^1(\partial D)} \leq \|G_r - g\|_{L^1(\partial D)} + 2\varepsilon.$$

Haluttu tulos

$$F(re^{i\theta}) = F_r(e^{i\theta}) \xrightarrow[r \nearrow 1]{} f(e^{i\theta})$$

pätee siis melkein kaikilla θ, kunhan

$$\|G_r - g\|_{L^1(\partial D)} \xrightarrow[r \nearrow 1]{} 0.$$

Viimeinen seuraa, koska jatkuvia funktioita voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti trigonometrisilla polynomeilla $\sum_{n=-N}^{N} g_n e^{in\theta}$ [esim. Rudin luku 4.24], ja näille taas pätee

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_n e^{in\varphi} \cdot \underbrace{P_r(\theta-\varphi)}_{=1+\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^k\left(e^{ik(\theta-\varphi)}+e^{-ik(\theta-\varphi)}\right)} d\varphi$$

$$= g_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

koska

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ik\varphi}\,d\varphi = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k\neq 0 \end{cases},$$

joten

$$\lim_{r\nearrow 1} \sum_{n=-N}^{N} g_n r^{|n|} e^{in\theta} = \sum_{n=-N}^{N} g_n e^{in\theta}. \quad \square$$

Nyt siis $F \in H^1(D)$ ja $\lim_{r\nearrow 1} F(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ melkein kaikilla θ, joten myös alunperin haluttu yhteys

$$F(z) = \lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,r)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

$$= \lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{F(r\zeta)}{r\zeta - z}\,r\,d\zeta$$

$$\overset{\text{DOM}}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\left(\lim_{r\nearrow 1}\frac{F(r\zeta)r}{r\zeta - z}\right)d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \quad \square$$