MAT. – 1. 3301. COMPLEX ANALYSIS        LONDEN / TIKANMÄKI.
EXERCISE SET 4.        (IV 2006 – 2007)

1. LET $f : U \to \mathbb{R}$ BE A $C^2$ FUNCTION ON AN OPEN SET $U \subseteq \mathbb{C}$.

(a) RECALL THAT IF $\Delta f > 0$ AT A POINT $P$, THEN $f$ CANNOT HAVE A LOCAL MAXIMUM AT $P$. USE THIS OBSERVATION TO DEDUCE THAT IF $\Delta f > 0$ EVERYWHERE ON $U$, THEN $f$ IS SUBHARMONIC. [HINT: IF $h$ IS HARMONIC, THEN $\Delta(f-h)$ IS ].

(b) IF $\Delta f \geq 0$ EVERYWHERE, THEN, FOR EACH $\varepsilon > 0$, $\Delta(f + \varepsilon|z|^2) > 0$ EVERYWHERE. USE A LIMITING ARGUMENT AND (a) TO DEDUCE THAT IF $\Delta f \geq 0$ EVERYWHERE, THEN $f$ IS SUBHARMONIC.

2. LET $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. PROVE THAT IF

$$\lim_{m \to \infty} \prod_{j=1}^{m} (1 + a_j) \quad \text{EXISTS AND IS NONZERO,}$$

THEN $a_j \to 0$.

3. SUPPOSE THAT $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n| < \infty$.

DETERMINE THE SET OF $z$ FOR WHICH

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z - \alpha_n}{z - \beta_n} \quad \text{CONVERGES NORMALLY.}$$

4. LET $\{a_j\} \subseteq D$ SATISFY $\displaystyle\sum_j \{1 - |a_j|\} < \infty$

AND LET $B(z)$ BE THE CORRESPONDING BLASCHKE PRODUCT. LET $P \in \partial D$. PROVE THAT $B$ HAS A CONTINUOUS EXTENSION TO $P$ IF AND ONLY IF $P$ IS NOT AN ACCUMULATION POINT OF THE $a_j$.

5. LET $B$ BE A CONVERGENT BLASCHKE PRODUCT. PROVE THAT $\displaystyle\sup_{z \in D} |B(z)| = 1$.

4.1 Olkoon $f : U \to \mathbb{R}$ $C^2$-funktio avoimella joukolla $U \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Peruskursseilta muistetaan, että jos $\Delta f > 0$ pisteessä $P$, ei funktiolla $f$ voi olla lokaalia maksimia pisteessä $P$. Todista tämän avulla, että jos $\Delta f > 0$ koko joukolla $U$, on $f$ välttämättä alihamoninen samalla joukolla. (Vinkki: jos funktio $h$ on harmoninen, pätee $\Delta(f-h) > 0$.)

(b) Jos $\Delta f \geq 0$ joukolla $U$, niin kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee $\Delta(f + \varepsilon|z|^2) > 0$ joukolla $U$. Käytä raja-arvoargumenttia ja kohtaa (a) näyttämään, että jos $\Delta f \geq 0$, niin $f$ on aliharmoninen. [ch. 7, ex. 69]

Muistutetaan mieleen aliharmonisen funktion määritelmä [Def. 7.7.2]:

Olkoot $V \subseteq \mathbb{C}$ avoin joukko ja $g$ reaaliarvoinen funktio joukolla $V$. Oletetaan, että kaikilla $\bar{D}(P,R) \subseteq V$ ja reaaliarvoisilla, joukon $\bar{D}(P,R)$ ympäristössä määritellyillä harmonisilla funktioilla $h$, joilla $g \leq h$ joukolla $\partial D(P,R)$, pätee $g \leq h$ myös joukolla $D(P,R)$. Tällöin $g$ on aliharmoninen.

(a) Oletetaan, että $\Delta f > 0$ koko joukolla $U$. Olkoot $\bar{D}(P,R) \subseteq U$ ja joukon $\bar{D}(P,R)$ ympäristössä määritelty reaaliarvoinen ja harmoninen funktio $h$, jolle $f \leq h$ reunalla $\partial D(P,R)$, mielivaltaisia.

Koska $h$ on harmoninen, niin
$$\Delta(f-h) = \Delta f > 0$$
joukolla $D(P,R)$, joten funktio $f-h$ ei saa ko. joukossa maksimia. Siispä kaikilla $z \in D(P,R)$
$$f(z) - h(z) = (f-h)(z) \leq \max_{\zeta \in \partial D(P,R)} (f-h)(\zeta) \leq 0,$$
joten $f \leq h$ joukolla $D(P,R)$.

Määritelmän perusteella $f$ on aliharmoninen.

(b) Oletetaan sitten, että $\Delta f \geq 0$ koko joukolla $U$.

TAPA 1 (vinkin mukaan):

Kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee
$$\Delta(f(z) + \varepsilon|z|^2) = \Delta f(z) + 4\varepsilon \geq 4\varepsilon > 0$$
kaikilla $z \in U$, joten (a)-kohdan perusteella funktio $z \mapsto f(z) + \varepsilon|z|^2$ on aliharmoninen. Edelleen kaikilla $z \in U$ pätee
$$f(z) \leq f(z) + \varepsilon|z|^2.$$

Olkoot sitten $\bar{D}(P,R) \subseteq U$ ja joukon $\bar{D}(P,R)$ ympäristössä määritelty reaalianvoinen ja harmoninen funktio $h_1$, jolle $\underline{f < h_1}$ reunalla $\partial D(P,R)$, mielivaltaisia.

Tällöin on olemassa $\varepsilon_{h_1} > 0$ siten, että kaikilla $z \in \partial D(P,R)$

$$f(z) + \varepsilon_{h_1}|z|^2 \leq h_1(z).$$

Aiemman perusteella tällöin

$$f(z) \leq f(z) + \varepsilon_{h_1}|z|^2 \leq h_1(z)$$

kaikilla $z \in D(P,R)$.

Olkoon tilanne sitten muutoin kuin yllä, mutta tarkastellaan mielivaltaista joukon $\bar{D}(P,R)$ ympäristössä määriteltyä reaalianvoista ja harmonista funktiota $h_2$, jolle pätee $\underline{f \leq h_2}$ reunalla $\partial D(P,R)$.

Tällöin kaikilla $\delta > 0$ funktio $h_2 + \delta$ on harmoninen ja reaalianvoinen joukon $\bar{D}(P,R)$ ympäristössä ja pätee $f < h_2 + \delta$ reunalla $\partial D(P,R)$. Yllä esitetyn perusteella pätee

$$f(z) \leq h_2(z) + \delta$$

kaikilla $z \in D(P,R)$ ja $\delta > 0$. Siispä

$$f(z) \leq h(z)$$

kaikilla $z \in D(P,R)$.

Määritelmän perusteella $f$ on siis aliharmoninen.

TAPA 2:

Olkoon $\bar{D}(P,R)$ mielivaltainen. Asetetaan

$$M(r) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(P+re^{i\theta})\,d\theta, & \text{kun } 0<r\leq R \\ f(P), & \text{kun } r=0. \end{cases}$$

Tämä funktio on varsin selvästi jatkuva. Tehtävän 3.4 todistusta mukaillen $M'(r)\geq 0$, joten $M$ on kasvava ja siis

$$f(P) = M(0) \leq M(R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(P+Re^{i\theta})\,d\theta.$$

Tällöin $f$ on aliharmoninen [Prop. 7.7.4].

$\square$

4.2 Olkoon $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Todista, että jos $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} (1+a_j)$ on olemassa ja nollasta poikkeava, niin $a_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. [ch. 8, ex. 2]

Oletetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} (1+a_j) = a \neq 0 .$$

Tällöin

$$0 = a - a = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n+1} (1+a_j) - \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} (1+a_j)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left((1+a_{n+1}) - 1\right) \prod_{j=1}^{n} (1+a_j) = a \lim_{n\to\infty} a_{n+1} .$$

Koska $a \neq 0$, on oltava

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 . \qquad \square$$

4.3 Oletetaan, että $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n| < \infty$. Määritä niiden pisteiden $z$ joukko, joilla tulo $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z-\alpha_n}{z-\beta_n}$ suppenee normaalisti. [ch. 8, ex. 14].

Määritelmän mukaan tulo $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + f_j(z))$ suppenee normaalisti joukolla $E$, jos se suppenee jokaisella $z \in E$ ja osatulojen jono $\{\prod_{j=1}^{n} (1 + f_j(z))\}_{n=1}^{\infty}$ suppenee normaalisti joukolla $E$ funktioon $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + f_j(z))$.

Ensinnäkin voidaan olettaa, että $\alpha_n \neq \beta_n$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, koska tulossa termeillä 1 ei ole merkitystä ja ne voidaan siis supistaa pois.

Tarkasteltavaa tuloa ei ole edes määritelty, kun $z \in \{\beta_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$. Edelleen tulo ei voi supeta jonon $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ kasautumispisteissä, koska mielivaltaisen lähellä näitä pisteitä tulossa on "napoja".

Suurin mahdollinen joukko, jossa suppeneminen voi olla normaalia, on siis
$$U := \mathbb{C} \setminus \overline{\{\beta_n : n \in \mathbb{Z}_+\}}.$$
Tämä joukko on avoin. Näytetään seuraavaksi, että tulo suppenee normaalisti koko tässä joukossa.

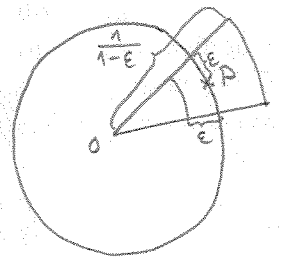
Koska
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z-\alpha_n}{z-\beta_n} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\beta_n-\alpha_n}{z-\beta_n}\right)$$
ja $\left(z \longmapsto \frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right) \in H(U)$, riittää osoittaa, että
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right|$$
suppenee normaalisti joukolla $U$ [Thm 8.1.9]. Sarja suppenee normaalisti, jos sen osasummien jono suppenee normaalisti.

Olkoot siis $K \subseteq U$ kompakti ja $\varepsilon > 0$. Asetetaan $d := \operatorname{dist}(K, U^c) > 0$. Olkoon $N_0 \in \mathbb{Z}_+$ sellainen, että
$$\sum_{n=N}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n| < \varepsilon d$$
kaikilla $N \geq N_0$. Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $z \in K$ pätee
$$|z-\beta_n| \geq d,$$
joten
$$\sum_{n=N}^{\infty}\left|\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right| \leq \frac{1}{d}\sum_{n=N}^{\infty}|\alpha_n-\beta_n| < \frac{1}{d}\cdot \varepsilon d = \varepsilon$$
kaikilla $z \in K$ ja $N \geq N_0$. $\square$

4.4 Toteuttakoon $\{a_j\} \subseteq D$ $\sum_{j=1}^{\infty} (1-|a_j|) < \infty$ ja olkoon $B(z)$ vastaava Blaschken tulo. Olkoon $P \in \partial D$. Osoita, että funktio $B$ voidaan jatkuvasti laajentaa pisteeseen $P$, jos ja vain jos $P$ ei ole pistejoukon $\{a_j\}$ kasautumispiste.
[ch. 9, ex. 5]

Nyt siis
$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} -\frac{\bar{a}_j}{|a_j|} B_{a_j}(z) := \prod_{j=1}^{\infty} -\frac{\bar{a}_j}{|a_j|} \cdot \frac{z-a_j}{1-\bar{a}_j z}$$
on rajoitettu holomorfinen funktio [Thm 9.1.5]. Tarkastellaan pistettä $P \in \partial D$.

"<=" Oletetaan, että piste $P = e^{i\theta}$ ei ole pistejoukon $\{a_j\}$ kasautumispiste. Tällöin on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että
$$\{z \in \mathbb{C} : \theta - \varepsilon < \arg z < \theta + \varepsilon,\ 1-\varepsilon < |z| \le 1\} \cap \{a_j\} = \emptyset .$$




Siispä pätee myös
$$\{z \in \mathbb{C} : \theta - \varepsilon < \arg z < \theta + \varepsilon,\ 1 \le |z| < \frac{1}{1-\varepsilon}\} \cap \{\bar{a}_j^{-1}\} \neq \emptyset,$$
koska $\overline{re^{i\varphi}}^{-1} = \frac{1}{r} e^{i\varphi}$.

Koska $B_{a_j} \in H(\mathbb{C} \setminus \{\bar{a}_j^{-1}\})$ kullakin $j \in \mathbb{Z}_+$, on siis edellisen perusteella olemassa $\varepsilon_1 > 0$ siten, että $B_{a_j} \in H(D \cup D(P, \varepsilon_1))$ kaikilla $j \in \mathbb{Z}_+$ ja $2\varepsilon_1 < \min\{2, \inf_{j \to \infty} |P - \bar{a}_j^{-1}|\}$.

Blaschken tulo suppenee normaalisti yksikkökiekolla [Thm 9.1.5]. Näytetään, että
$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| 1 - \left(-\frac{\bar{a}_j}{|a_j|} B_{a_j}(z)\right) \right|$$
suppenee tasaisesti kiekolla $D(P, \varepsilon_1)$, jolloin rajafunktio $B$ on holomorfinen ja siis jatkuva alueessa $D \cup D(P, \varepsilon_1)$ [Thm 8.1.9].

Tarkastellaan yksittäistä summeerattavaa:

$$\left|1-\left(-\frac{\bar a_j}{|a_j|}B_{a_j}(z)\right)\right| = \frac{\big||a_j|-|a_j|\bar a_j z+\bar a_j z-\bar a_j a_j\big|}{|a_j|\,|1-\bar a_j z|}$$

$$= \frac{|1-|a_j||\,\overbrace{\big||a_j|-\bar a_j z\big|}^{\le |a_j|+|\bar a_j||z|\le 1+|z|\le 3}}{\underbrace{|a_j||\bar a_j|}_{\ge 1/2,\ \text{kun } j\ge j_0}\,\underbrace{|\bar a_j^{-1}-z|}_{\ge \varepsilon_1,\ \text{kun } z\in D(P,\varepsilon_1)}}$$

$$\le \frac{12}{\varepsilon_1}(1-|a_j|),$$

kun $z\in D(P,\varepsilon_1)$ ja $j\ge j_0$. Koska $\sum_{j=1}^{\infty}(1-|a_j|)<\infty$, suppenee tarkasteltava sarja siis tasaisesti, kun $z\in D(P,\varepsilon_1)$.

"$\Rightarrow$" Oletetaan sitten, että $P=e^{i\theta}$ on joukon $\{a_j\}$ kasautumispiste. Tällöin on olemassa osajono $\{a_{j_k}\}$ siten, että

$$\lim_{k\to\infty} a_{j_k} = P \quad \text{ja}$$

$$\lim_{k\to\infty} B(a_{j_k}) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0.$$

Jos jatkuva jatke siis on olemassa, on oltava $B(P)=0$.

Koska jokainen $|B_{a_j}(z)|\le 1$, kun $z\in\overline{D}(0,1)$ [Cor. 5.4.3 & Prop. 9.1.1], on oltava

$$|B(z)|\le 1,$$

kun $z\in D(0,1)$, ja siis

$$\lim_{r\nearrow 1}\sup|B(re^{i\theta})|\le 1$$

kaikilla $\theta\in\mathbb{R}$.

Asetetaan

$$B_n(z) := \prod_{j=1}^{n} -\frac{\bar a_j}{|a_j|}B_{a_j}(z).$$

Tällöin myös $\frac{B(z)}{B_n(z)}$ on suppeneva Blaschken tulo yksikkökiekolla ja siis holomorfinen funktio [Thm 9.1.5] kullakin $n\in\mathbb{Z}_+$.

Cauchyn integraalikaavan [Thm 2.4.2] perusteella

$$\frac{B(0)}{B_n(0)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{B(re^{i\varphi})}{B_n(re^{i\varphi})}\,d\varphi, \qquad \left(\frac{dz}{z} = \frac{re^{i\varphi} i\,d\varphi}{re^{i\varphi}} = i\,d\varphi\right)$$

kun $r<1$. Edelleen

$$\left|\frac{B(0)}{B_n(0)}\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{B(re^{i\varphi})}{B_n(re^{i\varphi})}\,d\varphi\right| = \frac{1}{2\pi}\limsup_{r\nearrow 1}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{B(re^{i\varphi})}{B_n(re^{i\varphi})}\,d\varphi\right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\limsup_{r\nearrow 1}|B(re^{i\varphi})|}{\underbrace{\liminf_{r\nearrow 1}|B_n(re^{i\varphi})|}_{=1 \ \text{[Prop. 3.1.1]}}}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \limsup_{r\nearrow 1}|B(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = 1.$$

Toisaalta $B_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} B(0)$, joten

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \limsup_{r\nearrow 1}|B(re^{i\varphi})|\,d\varphi = 1$$

ja siis

$$\limsup_{r\nearrow 1}|B(re^{i\varphi})| = 1$$

melkein kaikilla $\varphi$.

On siis olemassa jono $(\theta_n)_{n=1}^{\infty}$ siten, että $\theta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$ ja $\limsup_{r\nearrow 1}|B(re^{i\theta_n})| = 1$ kaikilla $n\in\mathbb{Z}_+$. Kiinnitetään mielivaltainen jono $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ siten, että $\delta_n \searrow 0$. Kullakin $\theta_n$ valitaan $r_n \ge 1-\delta_n$ siten, että $|B(r_n e^{i\theta_n})| \ge 1-\delta_n$.

Nyt $r_n e^{i\theta_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} P$, mutta

$$|B(r_n e^{i\theta_n})| \ge 1-\delta_n \longrightarrow 1.$$

Toisaalta pitäisi olla $B(P)=0$, joten funktiolla $B$ ei voi olla jatkuvaa jatketta pisteeseen $P$. $\square$

4.5 Olkoon $B$ suppeneva Blaschken tulo. Osoita, että
$$\sup_{z\in D} |B(z)| = 1.$$
[ch. 9, ex. 8]

Blaschken tulo on muotoa
$$B(z) = z^m \prod_{j=1}^{\infty} -\frac{\bar{a}_j}{|a_j|} B_{a_j}(z),$$
missä $\{a_j\} \subset D$, $m \in \mathbb{Z}_+$ ja
$$B_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

Tarkastellaan jonoa
$$B_N(z) := z^m \prod_{j=1}^{N} -\frac{\bar{a}_j}{|a_j|} B_{a_j}(z).$$
Koska Blaschken tulo suppenee, $B_N \xrightarrow[N\to\infty]{} B$. Toisaalta $B_N \in H(D)$ kaikilla $N \in \mathbb{Z}_+$ ja
$$|B_N(z)| \le 1$$
kaikilla $z \in D$ ja $N \in \mathbb{Z}_+$, koska
$$|z^m| < 1,$$
$$\left|\frac{\bar{a}}{|a|}\right| = 1$$
ja
$$|B_a(z)| \le \max_{\zeta\in \bar{D}(0,1)} |B_a(\zeta)| = \max_{|\zeta|=1} \underbrace{\frac{1}{|\bar{\zeta}|}}_{=1} \cdot \frac{|\zeta-a|}{|1-\bar{a}\zeta|} = \max_{|\zeta|=1} \frac{|\zeta-a|}{|\bar{\zeta}-\bar{a}\underbrace{|\zeta|^2}_{=1}|} = 1,$$
kun $z \in D$. Montelin lauseen perusteella $B$ on tällöin välttämättä rajoitettu ja holomorfinen funktio.

Tällöin $B$ on muotoa
$$B(z) = B(z) \cdot F(z)$$
ja
$$\sup_{z\in D} |B(z)| = \sup_{z\in D} |F(z)| = 1$$
[Cor. 9.1.6]. □

Huom! Seurauslausetta 9.1.6 tarvitaan, jotta yläraja tiedetään olevan <u>tasan</u> 1 eikä vain <u>korkeintaan</u> 1.