MAT. - 1. 33UI COMPLEX ANALYSIS LUNDEN / TIUANMÄKI

EXERCISE SET 3. (IV 2006-2007)

1. LET u BE A POSITIVE HARMONIC FUNCTION ON THE UNIT DISC AND SUPPOSE THAT $u(0) = \alpha$. HOW LARGE CAN $u(\frac{3}{4})$ BE? HOW SMALL CAN IT BE? WHAT IS THE BEST POSSIBLE BOUND? WHAT FUNCTION REALIZES THAT BOUND?

2. IF H IS A NONVANISHING HOLOMORPHIC FUNCTION ON AN OPEN SET $U \subseteq \mathbb{C}$, PROVE THAT $\log|H|$ IS HARMONIC ON U.

3. COMPUTE A FORMULA ANALOGOUS TO THE POISSON INTEGRAL FORMULA, FOR THE REGION $U = \{z \mid \operatorname{im} z > 0\}$, BY MAPPING U CONFORMALLY TO THE UNIT DISC.

4. SUPPOSE THAT $f \in C^2$ AND SUBHARMONIC ON THE UNIT DISC. DEFINE

$$M(r) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, d\theta. \qquad 0 < r < 1.$$

SHOW THAT $r_1 \leq r_2$ IMPLIES $M(r_1) \leq M(r_2)$. [HINT: DIFFERENTIATE AND APPLY THE DIV. THEOREM]

5. LET Ω BE OPEN, CONNECTED. LET $f_m \in H(\Omega)$, $\forall m$. WRITE $u_m = \operatorname{Re} f_m$. SUPPOSE $\{u_m\}$ CONVERGES UNIFORMLY ON COMPACT SUBSETS OF Ω AND THAT $\{f_m(z)\}$ CONVERGES FOR AT LEAST ONE $z \in \Omega$. PROVE THAT THEN $\{f_m\}$ CONVERGES UNIFORMLY ON COMPACT SUBSETS OF Ω.

3.1 Olkoon u yksikkökiekon positiivinen harmoninen funktio. Oletetaan, että $u(0) = \alpha$. Kuinka suuri $u(3/4)$ voi olla? Kuinka pieni se voi olla? Mikä on paras mahdollinen raja? Millä funktiolla se saavutetaan? [ch. 7, ex. 30]

Harnackin epäyhtälön [Prop. 7.6.1] perusteella kaikilla $R \in (|z|, 1)$ pätee

$$\frac{R-|z|}{R+|z|} \cdot u(0) \le u(z) \le \frac{R+|z|}{R-|z|} \cdot u(0).$$

Rajalla $R \longrightarrow 1$ saadaan

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \cdot u(0) \le u(z) \le \frac{1+|z|}{1-|z|} \cdot u(0).$$

Funktiolla $R \longmapsto \frac{R-|z|}{R+|z|}$ ei ole välillä $(|z|, 1]$ derivaatan nollakohtia, joten maksimi on kohdassa $R = 1$. Siis parhaat mahdolliset rajat ovat

$$\alpha/7 = \frac{1-3/4}{1+3/4} \cdot u(0) \le u(3/4) \le \frac{1+3/4}{1-3/4} u(0) = 7\alpha.$$

Millä funktioilla nämä rajat sitten saavutetaan? Luonnollinen lähestymistapa lienee etsiä harmonista funktiota u siten, että reaaliakselilla

$$u(x) = \alpha \frac{1+x}{1-x} \qquad \left(\text{vastaavasti } u(x) = \alpha \frac{1-x}{1+x}\right),$$

joka saavuttaa halutun ylärajan (alarajan) kohdassa $z = 3/4$.

Koska u saa yksikkökiekolla positiivisia, ja siis reaalisia, arvoja, on olemassa [Lemma 7.1.2] holomorfinen funktio $F : D(0,1) \to \mathbb{C}$ siten, että yksikkökiekolla

$$u = \mathrm{Re}(F).$$

Tehdään (jonkun mielestä mahdollisesti naiivi) yrite

$$F(z) = \alpha \frac{1+z}{1-z} \qquad \left(\text{ja vastaavasti } F(z) = \alpha\frac{1-z}{1+z}\right).$$

Tällöin $F \in H(D(0,1))$ ja

$$\mathrm{Re}(F(z)) = \mathrm{Re}\,\alpha\frac{1+z}{1-z} = \alpha\,\mathrm{Re}\,\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{|1-z|^2}$$

$$= \alpha\,\mathrm{Re}\,\frac{1+z-\bar{z}-|z|^2}{|1-z|^2} = \alpha\frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} > 0 .$$

Yritteemme reaaliosa on siis koko yksikkökiekolla positiivinen ja holomorfisen funktion reaaliosana harmoninen. Reaaliakselilla edelleen pätee

$$\mathrm{Re}(F(x+i0)) = \alpha\frac{1-x^2}{(1-x)^2} = \alpha\frac{1+x}{1-x} = u(x+0i).$$

(Vastaava päättely toki toimii myös funktiolla $F(z) = \alpha\frac{1-z}{1+z}$).

Siispä ylärajan (alaraja) saavuttaa harmoninen funktio $u(z) = \alpha\,\mathrm{Re}\,\frac{1+z}{1-z}$ $\left(u(z) = \alpha\,\mathrm{Re}\,\frac{1-z}{1+z}\right)$. $\square$

Mat-1.3301 Kompleksianalyysi
IV 2006-07

LJT 29.3.2007

3.2 Olkoon H kaikkialla nollasta poikkeava holomorfinen funktio avoimella joukolla $U \subseteq \mathbb{C}$. Näytä, että funktio $\log|H|$ on harmoninen joukolla U. [ch. 7, ex. 23]

TAPA 1:

Koska $0 \notin H(U)$, on funktio
$$\log(H) = \log|H| + i\,\mathrm{Arg}(H)$$
holomorfinen jokaisella funktion $\mathrm{Arg}(H)$ haaran valinnalla. Siis funktio $\log|H|$ on harmoninen holomorfisen funktion reaaliosana [vrt. tehtävä 1.4]

TAPA 2:

Kirjoitetaan $u := \mathrm{Re}(H)$ ja $v := \mathrm{Im}(H)$. Tällöin sekä u että v ovat harmonisia ja raa'asti derivoiden saadaan
$$\frac{\partial^2}{(\partial x)^2}\log|H| = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(u^2+v^2)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2uu_x+2vv_x}{u^2+v^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{[2uu_{xx}+2u_x^2+2vv_{xx}+2v_x^2][u^2+v^2]-[2uu_x+2vv_x]^2}{(u^2+v^2)^2}$$
$$= \frac{u(u^2+v^2)u_{xx}+v(u^2+v^2)v_{xx}+u_x^2(u^2+v^2)+v_x^2(u^2+v^2)-2u^2u_x^2-2v^2v_x^2-4uvu_xv_x}{(u^2+v^2)^2}$$
$$= \frac{u(u^2+v^2)u_{xx}+v(u^2+v^2)v_{xx}+(u_xv-v_xu)^2-(uu_x+vv_x)^2}{(u^2+v^2)^2}.$$

Huom! Lasku on esitetty tässä vain pääpiirteissään. Kukaan ei olisi hyötynyt monen sivun väännöstä, paitsi jos laskee sen itse itselleen. :)

Vastaavasti
$$\frac{\partial^2}{(\partial y)^2}\log|H| = \frac{u(u^2+v^2)u_{yy}+v(u^2+v^2)v_{yy}+(u_yv-v_yu)^2-(uu_y+vv_y)^2}{(u^2+v^2)^2}$$
$$= \frac{u(u^2+v^2)u_{yy}+v(u^2+v^2)v_{yy}+(v_xv+u_xu)^2-(-uv_x+vu_x)^2}{(u^2+v^2)^2}$$
soveltamalla Cauchyn-Riemannin yhtälöitä.
Siis $\left[\frac{\partial^2}{(\partial x)^2}+\frac{\partial^2}{(\partial y)^2}\right]\log|H| = 0$. $\square$

3.3 Muodosta alueelle $U := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ Poissonin integraalikaavalle analoginen kaava kuvaamalla alue U konformisesti yksikkökiekolle. [ch. 7, ex. 25]

Kerrataan ensin Poissonin integraalikaava: [Thm 7.3.3]

Jos $\tilde{u} : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ on harmoninen kiekon $\bar{D}(0,1)$ ympäristössä, niin jokaisella $\tilde{a} \in D(0,1)$ pätee

$$\tilde{u}(\tilde{a}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(e^{i\psi}) \cdot \frac{1-|\tilde{a}|^2}{|\tilde{a}-e^{i\psi}|^2}\, d\psi.$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,1)} \tilde{u}(\xi) \frac{1-|\tilde{a}|^2}{\xi\,|\xi-\tilde{a}|^2}\, d\xi.$$

(vrt. kaavan alkuperäinen todistus!)

Tutusti Cayleyn muunnoksen käänteismuunnos (vrt. tehtävä 2.1)

$$z \mapsto i\,\frac{1+z}{1-z} =: \varphi(z)$$

kuvaa yksikkökiekon konformisesti puolitasolle U ja vieläpä siten, että $1 = e^{i0} \mapsto \infty$.

Olkoon sitten $v : V \to \mathbb{R}$ harmoninen jossakin puolitason $\bar{U}$ ympäristössä. Asetetaan $\tilde{v} := v \circ \varphi$. Tällöin $\tilde{v} : \varphi^{-1}(V) \to \mathbb{R}$, $\varphi^{-1}(V) \supset \bar{D}(0,1)$ jatkuvuuden perusteella ja $\tilde{v}$ on holomorfisen ja harmonisen funktion yhdisteenä harmoninen [Lemma 7.3.2], paitsi mahdollisesti pisteessä $z = 1$. Laajennetussa tasossa tarkastellen tämäkään ei derivaattojen jatkuvuuden perusteella ole ongelma.

Poissonin integraalikaavaa voidaan siis soveltaa funktioon $\tilde{v}$. Näin saadaan, kun $a \in U$,

$$v(a) = \tilde{v}(\varphi \circ \varphi^{-1}(a)) = \tilde{v}(\varphi^{-1}(a))$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(0,1)} \tilde{v}(\xi) \frac{1 - |\varphi^{-1}(a)|^2}{\xi |\xi - \varphi^{-1}(a)|^2} d\xi$$

Tehdään muuttujan vaihto $\xi = \varphi^{-1}(\zeta)$, $\zeta \in \partial U$, $d\xi = (\varphi^{-1})'(\zeta) d\zeta = \frac{2i}{(\zeta+i)^2} d\zeta$, $\varphi^{-1}(\zeta) = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}$

$$v(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \tilde{v}(\varphi^{-1}(\zeta)) \frac{1 - |\varphi^{-1}(a)|^2}{\varphi^{-1}(\zeta) |\varphi^{-1}(\zeta) - \varphi^{-1}(a)|^2} \frac{2i}{(\zeta+i)^2} d\zeta = \ldots$$

Nyt $\partial U = (-\infty, \infty)$, joten $\zeta = x$ ja

$$v(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(x) \frac{1 - |\varphi^{-1}(a)|^2}{\underbrace{|\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(a)|^2}_{\overset{(*)}{=} \left| \frac{2(x-a)}{(x+i)(a+i)} \right|^2} \cdot \underbrace{\varphi^{-1}(x)(x+i)^2}_{\overset{(*)}{=} (x-i)(x+i) = |x+i|^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(x) \frac{\operatorname{Im}(a)}{|x-a|^2} dx,$$

koska

$$1 - |\varphi^{-1}(a)|^2 = \frac{|a+i|^2 - |a-i|^2}{|a+i|^2} \overset{(*)}{=} \frac{4 \operatorname{Im}(a)}{|a+i|^2}$$ □

(*) yksityiskohdat kukin osannee täydentää itselleen.

3.4 Oletetaan, että $f \in C^2$ ja f on aliharmoninen yksikkökiekolla. Määritellään
$$M(r) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,d\theta, \qquad 0<r<1.$$
Näytä, että jos $r_1 \le r_2$, niin $M(r_1) \le M(r_2)$.
[Vinkki: Derivoi ja sovella divergenssilausetta]

TAPA1: (vinkin mukaan.)

Kerrataan divergenssilause L2:n tapaan:
Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ perusalue ja $\bar{F}$ alueessa A jatkuvasti derivoituva vektorikenttä. Tällöin on voimassa
$$\int_A \nabla\cdot\bar{F}\,da = \oint_{\partial A} \bar{F}\cdot d\bar{n}. \qquad (*)$$
(S.K. Kivelä: Vektorimuuttujan analyysi, Otatieto 577, 1997, s. 197).

Ryhdytään derivoimaan ja pidetään silmällä divergenssilauseen soveltamiskelpoisuutta. Olkoon $0<r<1$. Tällöin
$$M'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(re^{i\theta})\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \nabla f(re^{i\theta})\cdot\hat{e}_r\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} \nabla f(re^{i\theta})\cdot \underbrace{\hat{e}_r\,r d\theta}_{d\hat{e}_r = d\hat{n}}$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial D(0,r)} \nabla f(re^{i\theta})\cdot d\hat{e}_r$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi r}\int_{D(0,r)} \nabla\cdot\nabla f(re^{i\theta})\,dA$$
$$= \frac{1}{2\pi r}\int_{D(0,r)} \Delta f(re^{i\theta})\,dA \ge 0,$$
koska f aliharmonisena funktiona toteuttaa koko kiekossa
$$\Delta f \ge 0.$$

TAPA 2: (Rudinin tapaan.)

Nyt riittää olettaa, että $f \in C(\mathbb{C}, \mathbb{R})$.
Olkoot $0 < r_1 < r_2 < 1$ mielivaltaisia.
Funktio f on jatkuva joukolla $\partial D(0, r_2)$, joten on olemassa [Thm 7.3.4] sellainen $h \in C(\bar{D}(0, r_2), \mathbb{R})$, että h on harmoninen joukolla $D(0, r_2)$ ja funktiot f ja h yhtyvät ko. kiekon reunalla $\partial D(0, r_2)$. Edelleen $f \leq h$ kiekon sisäpisteissä [Def. 7.7.2].
Siis

$$M(r_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r_1 e^{i\theta})\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(r_1 e^{i\theta})\,d\theta$$

$$= h(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(r_2 e^{i\theta})\,d\theta \qquad \text{[Thm 7.2.5]}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r_2 e^{i\theta})\,d\theta = M(r_2). \qquad \square$$

3.5 Olkoon Ω avoin ja yhtenäinen. Olkoot $f_n \in H(\Omega)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Merkitään $u_n := \mathrm{Re}(f_n)$. Oletetaan, että jono $\{u_n\}$ suppenee tasaisesti joukon Ω kompakteilla osajoukoilla (eli normaalisti) ja että jono $\{f_n(z)\}$ suppenee ainakin yhdellä $z \in \Omega$. Todista, että tällöin jono $\{f_n\}$ suppenee normaalisti. [Rudin, ch. 11, ex. 8]

Koska tehtävä on Rudinista, otetaan sieltä käyttöön myös aputulos:

Olkoon U jatkuva reaalifunktio suljetulla kiekolla $\overline{D}(P,R) \subset \mathbb{C}$, $R > 0$, ja oletetaan, että U on harmoninen avoimella kiekolla $D(P,R)$. Tällöin (joukossa $D(P,R)$) funktio U on Poissonin integraali itsestään rajoitettuna reunalle $\partial D(P,R)$ ja funktio U on edelleen holomorfisen funktion

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{it} + (z-P)}{Re^{it} - (z-P)} U(P + Re^{it})\, dt$$

reaaliosa, kun $z \in D(P,R)$.

Aputuloksen avulla päästään siis suoraan käsiksi holomorfiseen funktioon F harmonisen funktion U avulla ilman derivointia.

Aputuloksen todistus löytyy lopusta.

Siirrytään sitten varsinaiseen työhön.

Koska jono $\{u_n\}$ suppenee normaalisti, on rajafunktio u_0 myös harmoninen. [Cor. 7.4.3]. Olkoon $z_0 \in \Omega$ (eräs) piste, jossa jono $\{f_n(z)\}$ suppenee.

Olkoot sitten annettuna kompakti joukko $K \subset \Omega$ ja $\varepsilon > 0$.

Jos $z_0 \notin K$, on pisteen z_0 ja mielivaltaisen joukon K pisteen välillä olemassa jatkuva polku $\gamma : [0,1] \to \Omega$, $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) \in K$, koska normiavaruuden (kuten $\mathbb{C}$) alueet ovat aina polkuyhtenäisiä [Huomautus 13.28; J. Väisälä: Topologia II, 1. painos, Limes, 1999]. Koska γ on jatkuva, on $\gamma([0,1])$ kompakti, joten $K \cup \gamma([0,1])$ on kompakti joukko, johon piste z_0 sisältyy. Jos jono $\{f_n\}$ suppenee tasaisesti tässä laajennetussa joukossa, se suppenee tasaisesti myös alkuperäisessä joukossa K.

Vastaavalla tavalla voidaan rakentaa kompakteja polkuja myös joukon K erillisten komponenttien välille, tarvittaessa induktiivisesti. Lopputuloksen voi rakentaa kompaktiksi, koska K on kompakti.

Yleisyyden kärsimättä voidaan siis olettaa, että $z_0 \in K$ ja että K on yhtenäinen.

Asetetaan
$$d := \inf_{k\in K,\, z\in \Omega^c} |z-k| > 0.$$
Muodostetaan joukolle K peite palloista, joiden säde on $d/3$. Koska K on kompakti, on tälläkin peitteellä olemassa äärellinen osapeite. Olkoot osapeitteen pallojen keskipisteet $p_1, \dots, p_M$.

Pallot edellä valittiin siten, että $\bar{D}(p_m, 2d/3) \subset \Omega$ kaikilla $m = 1, \dots, M$. Siispä kullakin m on olemassa (imaginaarista vakiota vaille yksikäsitteinen) $f_{0,m} \in H(D(p_m, 2d/3))$ [Lemma 7.1.2] siten, että $u_0|_{D(p_m, 2d/3)} = \mathrm{Re}(f_{0,m})$.

Jokainen palloista leikkaa ainakin yhtä toista palloa ja K on yhtenäinen, joten, koska funktioiden $f_{0,m}$ reaaliosat yhtyvät näissä leikkauksissa, avoimen kuvauksen lauseen [Thm 5.2.1] perusteella voidaan muodostaa (imaginaarista vakiota vaille yksikäsitteinen) $f_0 \in H(\bigcup_{m=1}^{M} D(p_m, 2d/3))$ siten, että
$$u_0|_{\bigcup_{m=1}^{M} D(p_m, 2d/3)} = \mathrm{Re}(f_0).$$

Kiinnitetään vakio siten, että
$$f_0(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_0).$$

Tarkastellaan sitten kiinteätä $m \in \{1, \dots, M\}$. Aputuloksen ehdot täyttyvät, joten kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ pätee

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2d/3 \cdot e^{it} + (z - P_m)}{2d/3 \cdot e^{it} - (z - P_m)} \cdot u_n(P_m + 2d/3 \cdot e^{it})\,dt + i c_n,$$

kun $z \in D(P_m, 2d/3)$, missä $c_n \in \mathbb{R}$. Erityisesti edellä oleva pätee, kun $z \in D(P_m, d/3)$.

Olkoon $N \in \mathbb{Z}_+$ sellainen, että

$$|u_n(z) - u_0(z)| < \varepsilon/7$$

kaikilla $z \in \bigcup_{i=1}^{M} \bar{D}(P_i, 2d/3)$ (kompakti!) ja

$$|f_n(z_0) - f_0(z_0)| < \varepsilon/7$$

molemmat pätevät kaikilla $n \geq N$.
Tällöin kaikilla $z \in D(P_m, d/3)$ ja $n \geq N$

$$|f_n(z) - f_0(z)| \leq |c_n - c_0| + \cancel{\frac{1}{2\pi}}\int_0^{2\pi} \underbrace{\left|\frac{2d/3 \cdot e^{it} + (z - P_m)}{2d/3 \cdot e^{it} - (z - P_m)}\right|}_{\leq \frac{2d/3 + d/3}{2d/3 - d/3} = 3} \underbrace{|(u_n - u_0)(P_m + 2d/3 \cdot e^{it})|}_{< \varepsilon/7}\,dt$$

$$< |c_n - c_0| + 3\varepsilon/7$$

$$\leq 3\varepsilon/7 + \overbrace{|f_n(z_0) - f_0(z_0)|}^{< \varepsilon/7} + \cancel{\frac{1}{2\pi}}\int_0^{\pi} \underbrace{\left|\frac{2d/3 \cdot e^{it} + (z_0 - P_0)}{2d/3 \cdot e^{it} + (z_0 - P_0)}\right|}_{\leq 3} \underbrace{|(u_n - u_0)(P_0 + 2d/3 \cdot e^{it})|}_{< \varepsilon/7}\,dt$$

$$< 3\varepsilon/7 + \varepsilon/7 + 3\varepsilon/7 = \varepsilon,$$

kun $P_0 \in \{P_1, \ldots, P_M\}$ siten, että $z_0 \in D(P_0, d/3)$.

Koska edellä m oli mielivaltainen, pätee siis

$$|f_n(z) - f_0(z)| < \varepsilon$$

kaikilla $z \in K$ ja $n \geq N$. Koska edelleen K ja ε olivat mielivaltaisia, suppenee jono $\{f_n\}$ siis normaalisti. $\square$