MAT. – 1.3301 Complex Analysis. Londen/Tiihanmäki
Exercise set 2. (IV 2006-2007)

1. Let $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$. Calculate all the conformal maps of U to U.

2. Show that if f is entire and one-to-one, then f is linear.
[Hint: Use the fact that f is one-to-one to analyze the possibilities for the singularity at ∞.]

3. Construct a linear fractional transformation that sends the unit disc to the half plane that lies below the line $x + 2y = 4$.

4. Let $\Omega \subset \mathbb{C}$ be a bounded (simply connected) domain and let $S = \{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ be a sequence of conformal mappings of Ω to Ω.
Prove that some subsequence of S converges normally to a holomorphic function from Ω into $\mathbb{C}$.

5. Let Ω be a bounded domain and let ϕ be a conformal map of Ω to Ω.
Let $P \in \Omega$. Suppose $\phi(P) = P$, $\phi'(P) = 1$.
Prove that ϕ is the identity map.
[Hint: Write $\phi(z) = P + (z-P) +$ higher order terms. Consider the compositions $\phi\circ\phi$, $\phi\circ\phi\circ\phi$, ...
Apply Cauchy estimates to the first non-zero coefficient of the power series for ϕ after $(z-P)$. Obtain a contradiction.]

2.1 Olkoon $U := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Laske kaikki konformikuvaukset joukolta U itselleen.
[ch. 6, ex. 8]

Cayleyn muunnos [Thm 6.3.6]
$$g(z) = \frac{z-i}{z+i}$$
on konformikuvaus tarkastelt avasta tasosta yksikkökiekolle. Yksikkökiekon konformikuvaukset taas ovat muotoa
$$f_{a,\omega}(z) = \omega \cdot \varphi_a(z),$$
missä
$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$
$|a|<1$ ja $|\omega| = 1$ [Thm 6.2.3]. Konformikuvausten yhdisteet ovat luonnollisesti edelleen konformisia: holomorfisia bijektioita. Siispä kaikki puolitason U konformikuvaukset itselleen ovat muotoa
$$g^{-1} \circ f_{a,\omega} \circ g$$
joillakin $a, \omega \in \mathbb{C}$ siten, että $|a|<1$ ja $|\omega| = 1$.

Yksinkertaisesti laskien
$$g^{-1}(z) = i\,\frac{1+z}{1-z},$$
joten lopulliseksi muodoksi saadaan (raivokkaan pyörittelyn avulla)
$$z \longmapsto \frac{zi\big((1-\bar{a}) + \omega(1-a)\big) - \big((1+\bar{a}) - \omega(1+a)\big)}{z\,\big((1-\bar{a}) - \omega(1-a)\big) + i\big((1+\bar{a}) + \omega(1+a)\big)}. \qquad \square$$

2.2 Näytä, että jos f on kokonainen injektio, sen täytyy olla lineaarinen. (Vinkki: Käytä hyödyksi funktion f injektiivisyyttä analysoidaksesi erikoispisteen lajia pisteessä ∞). [ch. 6, ex. 2]

Huom! Tässä 'lineaarinen' tarkoittaa 'ensimmäisen asteen polynomi'.

Ainoastaan vakiofunktiolla on poistuva erikoispiste pisteessä ∞. Vakiofunktio ei ole injektiivinen, joten kysymyksessä ei voi olla poistuva erikoispiste. [Thm. 4.7.5]

Jos funktiolla f on oleellinen erikoispiste pisteessä ∞, täytyy kuvajoukon jokaisessa pisteen ∞ ympäristöstä (l. joukossa $\infty \in U \subset \mathbb{C} \cup \infty$ s.e. $\exists R > 0$ $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \subset U$) olla tiheä laajennetussa kompleksitasossa. Kiinnitetään $R > 0$ ja tarkastellaan joukon $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ kuvaa $V := f(U)$. Nyt $f(U^c) = f(\bar{D}(0, R))$ on epätyhjä ja kompakti. Koska f on injektio, on oltava $f(U) \cap f(U^c) = \emptyset$. Edelleen joukon $f(U^c)$ pienin läpimitta on positiivinen, koska f on holomorfinen eikä se ole vakio. Täten $V \subset \mathbb{C} \setminus f(U^c)$ ei voi olla tiheä kompleksitasossa eikä funktiolla f voi olla oleellista erikoispistettä pisteessä ∞.

Kokonaisen funktion Laurentin sarjassa on ainoastaan epänegatiivieksponenttisia termejä, joten funktiolla f on väistämättä jokin erikoispiste pisteessä ∞ (vrt. [Def. 4.7.4]). Aiemman perusteella funktiolla f voi olla pisteessä ainoastaan napa, joten f on siis polynomi, vähintään astetta 1. [Thm. 4.7.5]

Voidaan siis kirjoittaa
$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$
jollakin $n \in \mathbb{Z}_+$, $a_n \neq 0$.

Jos $n \geq 2$, on olemassa $z_0 \in \mathbb{C}$ siten, että $f'(z_0) = 0$. Tällöin funktion f sarjakehitelmä pisteen z_0 ympäristössä on muotoa
$$f(z) = b_0 + \sum_{k=2}^{n} b_k (z-z_0)^k,$$
joten [Thm 5.2.2] pisteellä z_0 on olemassa ympäristö, jonka kaikilla pisteillä z_1 pätee
$$|f^{-1}(z_1)| \geq \min\{k>1 : b_k \neq 0\} \geq 2.$$
Siis f ei tällöin voi olla injektio.

Kun $n = 1$, funktion f on muotoa
$$f(z) = az + b,$$
$a \neq 0$, joka on jopa kokonainen bijektio. Edellisen perusteella ensimmäisen asteen polynomi on myös ainoa mahdollisuus. $\square$

Edellisen voi toki todeta myös tapaustarkastelulla. Olkoon $n > 1$.

1° $f(z) = a_n z^n$.

Olkoon $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mielivaltainen. Tällöin

$$|f^{-1}(z_0)| = n \geq 2.$$

2° $f(z) = a_n z^n + a_0, \quad a_0 \neq 0$.

Tällöin

$$|f^{-1}(0)| = |\{z \in \mathbb{C} : z^n = -\frac{a_0}{a_n}\}| = n \geq 2.$$

3° Muutoin $n_0 := \min\{k \geq 1 : a_k \neq 0\} < n$. Tällöin

$$f(z) = z^{n_0} \sum_{k=n_0}^{n} a_k z^{k-n_0} + a_0,$$

joten

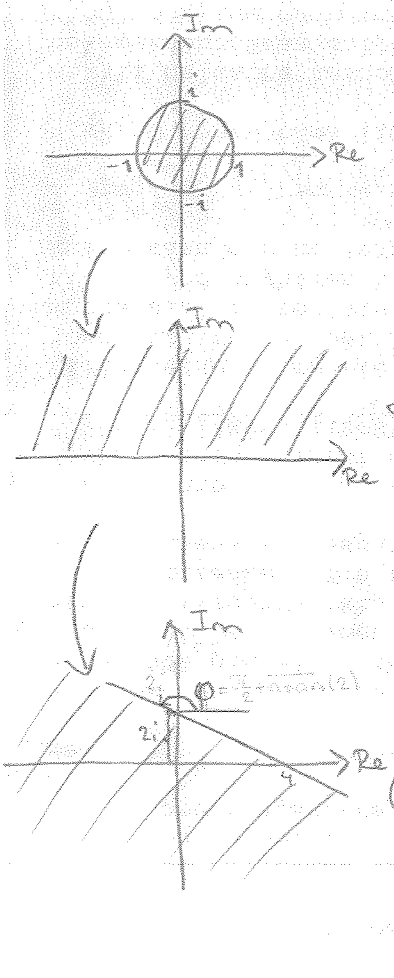
$$|f^{-1}(a_0)| = |\{z \in \mathbb{C} : \underbrace{z^{n_0}}_{z=0} (\underbrace{\sum_{k=n_0}^{n} a_k z^{k-n_0}}_{\text{ainakin yksi } z \neq 0 \text{ (vrt. } n_0)}) = 0\}| \geq 2.$$

Funktio f ei siis mitenkään voi olla injektio. $\square$

2.3 Muodosta lineaarinen rationaalimuunnos, (tai suomeksi paremmin Möbius-kuvaus), joka kuvaa yksikkökiekon suoran $x+2y=4$ alapuoliseen puolitasoon. [ch. 6, ex. 32]

Huom! Ko. ehdot täyttäviä Möbius-kuvauksia on luonnollisesti äärettömän monta, joten tuloksena on aina väistämättä vain eräs ehdot täyttävä kuvaus matkalla tehdyistä valinnoista riippuen.

TAPA 1:



Jaetaan tehtävä osiin. Kuvataan ensin Cayleyn muunnoksen käänteismuunnoksella (vrt. 2.1) yksikkökiekko reaaliakselin yläpuoliseen puolitasoon ja muodostetaan muunnos tältä puolitasolta haluttuun puolitasoon yhdistelmänä ~~alkeismuunnoksia~~ kierto ja siirto. Etsitty muunnos on edellisten yhdistetty kuvaus (vrt. Thm. 6.3.4).

Tehtävässä 2.1 laskettiin Cayleyn muunnoksen käänteismuunnokseksi

$$z \longmapsto i\,\frac{1+z}{1-z}.$$

(Eräs) muunnos em. puolitasojen välillä on

$$z \longmapsto e^{i\varphi}z + 2i = \frac{-4+2i}{|4+2i|}\,z + 2i = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}i\right)z + 2i.$$

(Eräs) kokonaismuunnos on siis

$$z \longmapsto \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)i\,\frac{1+z}{1-z} + 2i = \frac{(-1-2(1+\sqrt{5})i)z + (-1+2(\sqrt{5}-1)i)}{-\sqrt{5}\,z + \sqrt{5}}.$$

TAPA 2:

Käytetään peruskurssilta tuttua kaksoissuhdetta, joka perustuu sille, että Möbius-kuvauksen kiinnittämiseen riittää kolme pisteparia. Tämä on ilmeistä sekä muunnoksen muodosta että siitä tosiasiasta, että muunnos kuvaa (laajennetut) suorat ja ympyrät (laajennetuiksi) suoriksi ja ympyröiksi [Thm 6.3.7]. Riittää siis valita yksikkökiekon reunalta (l. yksikköympyrältä) kolme pistettä, jotka kuvataan suoran $x+2y=4$ kolmelle vapaavalintaiselle pisteelle ~~seuraavan~~ suunnistus säilyttäen, jotta juuri kiekon sisäosa kuvautuu suoran alapuoleksi.

Valitaan pisteet 1, i ja $-i$ kuvattavaksi pisteille 4, $2+i$ ja $2i$. (Toisilla pistejoukkojen valinnoilla saataisiin muita muunnoksia.)

Kun sijoitetaan nämä kaksoissuhteen kaavaan (vrt. seuraava sivu)

$$\frac{(z-z_1)}{(z-z_3)}\cdot\frac{(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)}=\frac{(w-w_1)}{(w-w_3)}\cdot\frac{(w_2-w_3)}{(w_2-w_1)}$$

saadaan

$$\frac{z-1}{z+i}\cdot\underbrace{\frac{i+i}{i-1}}_{=\frac{1}{1/2+1/2\,i}}=\frac{w-4}{w-2i}\cdot\underbrace{\frac{2-i}{i-2}}_{=-1},$$

joten (erääksi toiseksi) muunnokseksi saadaan

$$z\longmapsto w=\frac{(4+8i)z-4}{(3+i)z-3+i}\qquad\square$$

THEOREM 1 **(Fixed points)**

A linear fractional transformation, not the identity, has at most two fixed points. If a linear fractional transformation is known to have three or more fixed points, it must be the identity mapping $w = z$.

How to Find Linear Fractional Transformations

A mapping (1) is determined by a, b, c, d, actually by the ratios of three of these constants to the fourth because we can drop or introduce a common factor. This makes it plausible that three conditions determine a unique mapping (1):

THEOREM 2 **(Three points and their images given)**

Three given distinct points z_1, z_2, z_3 *can always be mapped onto three prescribed distinct points* w_1, w_2, w_3 *by one, and only one, linear fractional transformation* $w = f(z)$. *This mapping is given implicitly by the equation*

$$\boxed{\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.} \tag{6}$$

(If one of these points is the point ∞, *the quotient of the two differences containing this point must be replaced by* 1.)

PROOF. Equation (6) is of the form $F(w) = G(z)$ with linear fractional F and G. Hence $w = F^{-1}(G(z)) = f(z)$, where F^{-1} is the inverse of F and is linear fractional [see (4)], and so is the composite $F^{-1}(G)$ (by Team Project 6), that is, $w = f(z)$ is linear fractional. Now in (6), set $w = w_1$, then $w = w_2$, then $w = w_3$ on the left and $z = z_1, z_2, z_3$ on the right, to see that

$$F(w_1) = 0, \qquad F(w_2) = 1, \qquad F(w_3) = \infty$$

$$G(z_1) = 0, \qquad G(z_2) = 1, \qquad G(z_3) = \infty.$$

From the first column, $F(w_1) = G(z_1)$, thus $w_1 = F^{-1}(G(z_1)) = f(z_1)$. Similarly, $w_2 = f(z_2)$, $w_3 = f(z_3)$. This proves the existence of the desired linear fractional transformation.

To prove uniqueness, let $w = g(z)$ be a linear fractional transformation, which also maps z_j onto w_j, $j = 1, 2, 3$. Thus $w_j = g(z_j)$. Hence $g^{-1}(w_j) = z_j$, where $w_j = f(z_j)$. Together, $g^{-1}(f(z_j)) = z_j$, a mapping with the three fixed points z_1, z_2, z_3. By Theorem 1, this is the identity mapping, $g^{-1}(f(z)) = z$ for all z. Thus $f(z) = g(z)$ for all z, the uniqueness. ◀

The last statement of Theorem 2 follows from the preceding General Remark.

Mapping of Standard Domains by Theorem 2

Principle. Prescribe three boundary points z_1, z_2, z_3 of the domain D in the z-plane. Choose their images w_1, w_2, w_3 on the boundary of the image D^* of D in the w-plane. Obtain the mapping from (6). Make sure that D is mapped onto D^*, not on its complement. In the latter case, interchange two w-points. (Why does this help?)

Kreyszig: Advanced engineering mathematics, 8th edition, Wiley 1999

2.4 Olkoot $\Omega \subset \mathbb{C}$ rajoitettu yhdesti yhtenäinen alue ja $S = \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ jono konformikuvauksia alueelta Ω itselleen. Osoita, että jokin jonon S osajono suppenee normaalisti holomorfiseen funktioon alueesta Ω tasoon $\mathbb{C}$. [Ch. 6, ex. 10]

Muistutetaan mieliin määritelmä [Def. 6.5.1]: Avoimella joukolla $U \subseteq \mathbb{C}$ määritelty funktiojono $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ <u>suppenee normaalisti</u> joukolla U määriteltyyn rajafunktioon f_0, jos ko. jono suppenee tasaisesti kompakteilla joukon U osajoukoilla funktioon f_0.

Konformikuvaukset ovat holomorfisia. Edelleen, koska Ω on rajoitettu (eli on olemassa $R > 0$ siten, että $|z| < R$ kaikilla $z \in \Omega$), jonon S konformikuvaukset ovat tasaisesti rajoitettuja:

$$\forall z \in \Omega,\ j \in \mathbb{Z}_+ : \quad \varphi_j(z) \in \Omega \Rightarrow |\varphi_j(z)| < R.$$

Täten Montelin lausetta [Thm 6.5.3] voidaan soveltaa ja siis on olemassa holomorfiseen funktioon suppeneva osajono. $\square$

2.5 Olkoot Ω rajoitettu alue ja φ konformikuvaus kyseiseltä alueelta itselleen. Olkoon $P \in \Omega$. Oletetaan, että $\varphi(P) = P$ ja $\varphi'(P) = 1$. Näytä, että φ on identiteettikuvaus. [ch. 6, ex. 17]
(Vinkki: Kirjoita $\varphi(z) = P + 1 \cdot (z - P) +$ korkeamman asteen termit. Tarkastele yhdistettyjä kuvauksia $\varphi \circ \varphi$, $\varphi \circ \varphi \circ \varphi$, ... Sovella Cauchyn arviota potenssisarjan ensimmäiseen nollasta poikkeavaan termiin lineaarisen jälkeen. Saavuta ristiriita.)

Muistutetaan mieliin Cauchyn arviot:
Jos $f \in H(U)$, U avoin, $P \in U$, $r > 0$ ja $\bar{D}(P, r) \subset U$, niin
$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(P) \right| \leq \frac{M k!}{r^k},$$
kun $M := \sup_{z \in \bar{D}(P,R)} |f(z)|$ ja $k \in \mathbb{Z}_+$. [Thm 3.4.1]

Konforminen kuvaus on aina holomorfinen, joten funktiolla φ on jossakin pisteen P ympäristössä suppeneva sarjaesitys
$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(P)}{n!}(z-P)^n =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-P)^n. \quad \text{[Thm. 3.3.1]}$$
Cauchyn arviota varten tarvitaan funktion yläraja tarkastelukiekossa. Koska φ on konforminen ja Ω rajoitettu, voidaan soveltaa universaaliylärajaa
$$M := \sup_{z \in \Omega} |\varphi(z)| = \sup_{z \in \Omega} |z| < \infty.$$
Cauchyn arvio on voimassa kaikilla $r > 0$, joilla $\bar{D}(P, r) \subset \Omega$. Erityisesti rajatapauksena saadaan, että se on voimassa myös arvolla $R := \inf_{z \in \Omega^c} |P - z|$, kun M on universaaliyläraja.

Täten kertoimille saadaan ainoastaan alueesta Ω riippuvat ylärajat
$$|\alpha_n| \leq \frac{1}{n!} \cdot \frac{Mn!}{R^n} = \frac{M}{R^n}.$$

Yhdistetty kuvaus $\varphi_n := \varphi \circ \dots \circ \varphi$ (n kpl) on myös alueen Ω konformikuvaus itselleen, joten sama yläraja on voimassa myös sen potenssisarjan kertoimille.

Olkoon sitten $N := \min\{n > 1 : \alpha_n \neq 0\}$ ja oletetaan, että tällainen N on olemassa. Tällöin funktion $\varphi = \varphi_1$ potenssisarja voidaan kirjoittaa muodossa
$$\varphi_1(z) = P + (z-P) + \alpha_N (z-P)^N \underbrace{\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^1 (z-P)^k\right)}_{=: b_1(z)}$$
joillakin $\beta_k^1 \in \mathbb{C}$. Tämä potenssisarja suppenee, kun $z \in D(P,R)$ [Thm. 3.3.1].

Näytetään induktiivisesti, että pätee
$$\varphi_n(z) = P + (z-P) + \alpha_N (z-P)^N \underbrace{\left(n + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^n (z-P)^k\right)}_{=: b_n(z)}$$
joillakin $\beta_k^n \in \mathbb{C}$ kiekossa $D(P,R)$. Edellisen perusteella tällöin pätee
$$|\alpha_N \cdot n| \leq \frac{M}{R^N}$$
kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, joten välttämättä on oltava
$$\alpha_N = 0,$$
mutta tämä on ristiriidassa luvun N olemassaolon kanssa, joten välttämättä
$$\varphi(z) = P + 1 \cdot (z-P) = z$$
ja φ siis on identiteettikuvaus.

Käydään sitten läpi varsinainen induktiivinen päättely. Tapaus $n=1$ on kunnossa. Oletetaan, että väite pätee, kun $n=m$. Tarkastellaan tapausta $n=m+1$.

Koska piste P on (jatkuvan) funktion φ kiintopiste, on olemassa $\delta > 0$ siten, että $\varphi(D(P,\delta)) \subset D(P,R)$. Siispä, kun $z \in D(P,\delta)$, saadaan

$$
\begin{aligned}
\varphi_{m+1}(z) &= \varphi_m(\varphi(z)) \\
&= \underbrace{P + (\varphi(z) - P)}_{=\varphi(z)} + \alpha_N (\underbrace{\varphi(z) - P}_{=(z-P)+\alpha_N(z-P)^N b_1(z)})^N b_m(\varphi(z)) \\
&= \varphi(z) + \alpha_N b_m(\varphi(z)) \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} (z-P)^j [(z-P)]^{N-j} (b_1(z))^{N-j} \alpha_N^{N-j} \\
&= \varphi(z) + \alpha_N b_m(\varphi(z)) (z-P)^N + \alpha_N (z-P)^{N+1} \times \\
&\quad \text{joku potenssisarja} \\
&= P + (z-P) + \alpha_N (z-P)^N \Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^1 (z-P)^k\Big) \\
&\quad + \alpha_N (z-P)^N \Big(m + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^m (\varphi(z) - P)^k\Big) \\
&\quad + \alpha_N (z-P)^{N+1} \times (\text{joku pot. sarja}) \\
&= P + (z-P) + \alpha_N (z-P)^N \Big((m+1) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{m+1} (z-P)^k\Big)
\end{aligned}
$$

joillakin $\beta_k^{m+1} \in \mathbb{C}$. Funktiolla φ_{m+1} on kiekossa $D(P,R)$ suppeneva potenssisarja [Thm 3.3.1]. Edelleen tämä potenssisarja on yksikäsitteinen, joten edellä muodostettu oikeaa muotoa oleva potenssisarja suppenee siis kaikilla $z \in D(P,R)$. □