Mat-1.3301 Kompleksianalyysis
IV 2006-2007

Londen / Tikanmäki

1.1 Let f be holomorphic on $U \setminus \{P\}$, $P \in U$, U open. If f has an essential singularity at P, then what type of singularity does $1/f$ have at P? What about when f has a removable singularity or a pole at P? [ex. 3, ch. 4]

1.2 Let $P = 0$. Classify the following as having a removable singularity, a pole or an essential singularity at P: [ex 5.(c),(d), ch. 4]
(i) $\frac{\sin(z)}{z}$, (ii) $z \cdot e^{1/z} \cdot e^{-1/z^2}$.

1.3 Let $f_1, f_2, \dots$ be holomorphic on $D(P,r) \setminus \{P\}$ and suppose that each f_j has a pole at P. If $\lim_{j\to\infty} f_j$ converges uniformly on compact subsets of $D(P,r) \setminus \{P\}$, then does the limit function f necessarily have a pole at P? Answer the same question with "pole" replaced by "removable singularity" or "essential singularity". [ex. 14, ch. 4]

1.4 Let $f: D(0,1) \to \mathbb{C}$ be holomorphic and non-vanishing. Prove that f has a well-defined holomorphic logarithm on $D(0,1)$ by showing that the differential equation
$$\frac{\partial}{\partial z} g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$
has a suitable solution and checking that this solution g does the job. [ex. 6, ch. 5]

1.5 Suppose that f is holomorphic and has n zeros, counting multiplicities, inside U. Can you conclude that f' has $n-1$ zeros inside U? Can you conclude anything about the zeros of f'? [ex. 12, ch. 5]

1.1. Kerrataan määritelmät:

(i) Funktiolla f on pisteessä P poistuva erikoispiste, jos funktio f on rajoitettu jossain pisteen P avoimessa, punkteeratussa ympäristössä. Tällöin f voidaan laajentaa holomorfisesti myös pisteeseen P asettamalla

$$f(P) = \lim_{U \ni z \to P} f(z).$$

(ii) Funktiolla f on pisteessä P napa, jos on olemassa $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$, siten, että funktiolla

$$z \longmapsto f(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(z-P)^k}$$

on pisteessä P poistuva erikoispiste. Tämä on ekvivalenttia sen kanssa, että

$$\lim_{U \ni z \to P} |f(z)| = \infty.$$

(iii) Jos kumpikaan em. tilanteista ei ole voimassa, on kyseessä oleellinen erikoispiste. Matemaattisesti tämä voidaan määritellä seuraavasti: Kaikilla $r > 0$ siten, että $D(P, r) \subset U$ $f(D(P,r) \setminus \{P\})$ on tiheä avaruudessa $\mathbb{C}$.

HUOM. Nämä määritelmät ovat yleensä voimassa ainoastaan eristetyille erikoispisteille. Jos siis funktiolla f on pisteessä P nollakohtien kasautumispiste, ei funktion $1/f$ erikoispistettä pisteessä P voi lainkaan luokitella.

(a) P on funktion f oleellinen erikoispiste. Koska kuvaus $z \mapsto 1/z : \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0,\infty\} \to \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0,\infty\}$ on jatkuva, se kuvaa tiheät joukot tiheille joukoille. Siispä $1/f(D(P,r) \setminus \{P\})$ on tiheä avaruudessa $\mathbb{C}$ kaikilla niillä $r>0$, joilla $D(P,r) \subset U$. Piste P on siis myös funktion $1/f$ oleellinen erikoispiste.

[Todistus epsiloneja järjestykseen laittaen: Olkoot $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ ja $\varepsilon > 0$ mielivaltaisia.

1° Jos $\zeta_0 \neq 0$, on olemassa $w \in f(D(P,r) \setminus \{P\})$ siten, että $\left|w - \frac{1}{\zeta_0}\right| \overset{(*)}{<} \min\left(\frac{\varepsilon}{2|\zeta_0|^2}, \frac{1}{2|\zeta_0|}\right)$, koska $f(D(P,r) \setminus \{P\})$ on tiheässä avaruudessa $\mathbb{C}$. Tällöin

$$|w| \overset{\Delta\text{-ey}}{\geq} \left|\frac{1}{\zeta_0}\right| - \left|\frac{1}{\zeta_0} - w\right| \overset{(*)}{>} \left|\frac{1}{\zeta_0}\right| - \frac{1}{2|\zeta_0|} = \frac{1}{2|\zeta_0|}$$

ja siis $\frac{1}{|w|} < 2|\zeta_0|$. Edelleen saadaan

$$\left|\frac{1}{w} - \zeta_0\right| = \frac{|\zeta_0|}{|w|}\left|\frac{1}{\zeta_0} - w\right| \overset{(ed.)}{<} 2|\zeta_0|^2 \left|\frac{1}{\zeta_0} - w\right| \overset{(*)}{<} \varepsilon.$$

Varsin ilmeisesti $\frac{1}{w} \in \frac{1}{f}(D(P,r) \setminus \{P\})$.

2° Tarkastellaan sitten tapausta $\zeta_0 = 0$. Varsin ilmeisesti $\frac{2}{\varepsilon} \in \mathbb{C}$, joten on olemassa $w \in f(D(P,r) \setminus \{P\})$ siten, että $|w - 2/\varepsilon| < 1/\varepsilon$. Siispä

$$|w| \overset{\Delta\text{-ey}}{\geq} 2/\varepsilon - \left|\frac{2}{\varepsilon} - w\right| \overset{(ed.)}{>} 2/\varepsilon - 1/\varepsilon = 1/\varepsilon,$$

joten edelleen

$$\left|\frac{1}{w} - \zeta_0\right| = \left|\frac{1}{w} - 0\right| = \frac{1}{|w|} < \varepsilon.$$

Nytkin $\frac{1}{w} \in \frac{1}{f}(D(P,r) \setminus \{P\})$.

Edellisten perusteella voidaan todeta, että $\frac{1}{f}(D(P,r) \setminus \{P\}) = 1/f(D(P,r) \setminus \{P\})$ on tiheässä avaruudessa $\mathbb{C}$. □]

(b) P on funktion f poistuva erikoispiste. Nyt funktio f voidaan jatkaa holomorfisesti pisteeseen P. Olkoon $\hat{f}$ tämä laajennus. Käsiteltäväksi tulee kaksi tapausta:

1° Jos $\hat{f}(P) \neq 0$, on funktio $1/\hat{f}$ holomorfinen jossakin pisteen P ympäristössä, joten ~~k~~ myös funktiolla $1/f$ on poistuva erikoispiste pisteessä P.

2° Jos taas funktiolla $\hat{f}$ on pisteessä P m-kertainen nollakohta (eli $\hat{f}(z) = (z-P)^m g(z)$, $g \in H(U)$, $g(P) \neq 0$), niin funktiolla $1/f$ on pisteessä P m-kertainen napa.

(c) P on funktion f (m-kertainen) napa. Tällöin $f(z) = (z-P)^{-m} g(z)$, missä $g \in H(U \setminus \{P\})$, piste P on poistuva erikoispiste funktiolle g ja $\hat{g}(P) \neq 0$. Nyt

$$\frac{1}{f}(z) = (z-P)^m \, {}^1/g(z).$$

Kohdan (b) perusteella funktiolla $1/g$ on pisteessä P poistuva erikoispiste, joten koko funktiolla $1/f$ on myös pisteessä P poistuva erikoispiste. $\square$

1.2 (i) $z \longmapsto \dfrac{\sin(z)}{z}$

Funktion $z \mapsto \sin(z)$ sarjakehitelmä pisteen 0 ympäristössä on

$$\sin(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

(ja itse asiassa tämä kehitelmä suppenee koko kompleksitasossa), joten tarkasteltavalla funktiolla on pisteen 0 ympärillä sarjakehitelmä

$$\frac{\sin(z)}{z} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j+1)!}.$$

Tämä on (geometrisena sarjana) rajoitettu ja suppeneva (ainakin) kiekossa $D(0,1)$, joten funktiolla on pisteessä 0 poistuva erikoispiste ja

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin(z)}{z} = (-1)^0 \cdot \frac{1}{(2\cdot 0+1)!} = 1.$$

(ii) $z \longmapsto z \cdot e^{1/z} \cdot e^{-1/z^2}$

Tarkastellaan funktion käyttäytymistä lähestyttäessä pistettä 0 akselien suunnassa:

(a) Reaaliakselin suunnassa $z = h \in \mathbb{R}$, joten tarkasteltava funktio saa muodon

$$h e^{1/h} \cdot e^{-1/h^2} = h \exp\left(\frac{h-1}{h^2}\right).$$

Koska $\dfrac{h-1}{h^2} \xrightarrow[h \to 0]{} -\infty$, saadaan

$$\lim_{\mathbb{R} \ni z \to 0} z \cdot e^{1/z} e^{-1/z^2} = 0.$$

(b) Imaginääriakselilla taas $z = ih \in i\mathbb{R}$, joten tarkasteltavana on funktio

$$h \longmapsto ih \exp\left(-\frac{i}{h}\right) \exp\left(+\frac{1}{h^2}\right).$$

Nyt $\left|\exp\left(-\frac{i}{h}\right)\right| = 1$ ja tavanomaisesta reaalianalyysistä tiedetään, että

$$\lim_{h \to 0} h \exp\left(\frac{1}{h^2}\right) = \infty,$$

joten
$$\lim_{i\mathbb{R}\ni z\to 0} \left| z \cdot e^{1/z} \cdot e^{-1/z^2} \right| = \infty .$$
(Itseisarvoltaan mielivaltaisen pienillä poikkeaman h arvoilla termi $\exp(-\frac{i}{h})$ käy luonnollisesti läpi kaikki mahdolliset suuntakulmat kompleksitasossa.)

Tarkasteltava funktio on alueessa $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorfinen ja siten jatkuva. Näin ollen mielivaltaisen pisteen 0 punkteeratun ympäristön kuva ko. kuvauksessa on koko avaruus $\mathbb{C}$. Siispä piste 0 on tarkasteltavalle funktiolle olennainen erikoispiste. $\square$

1.3 Kerrataan määritelmä:
Joukolla U määritelty funktiojono $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ <u>suppenee funktioon f tasaisesti kompakteilla osajoukoilla</u>, jos mielivaltaisilla kompaktilla $K \subset U$ ja $\varepsilon > 0$ löytyy $N = N(K, \varepsilon) \in \mathbb{Z}_+$ siten, että
$$|f_k(z) - f(z)| < \varepsilon$$
kaikilla $z \in K$, kun $k > N$.

Tapaus: napa, $P = 0$

Oletetaan yksinkertaistuksen vuoksi, että $P = 0$. (Helpolla siirrolla $z \mapsto z - P$ sama päättely toki toimii mielivaltaisella $P \in \mathbb{C}$.) Tarkastellaan funktiojonoa $f_n(z) := 1/nz$. Olkoot $\varepsilon > 0$ ja kompakti $K \subset D(0, r) \setminus \{0\}$ mielivaltaisia. (Luonnollisesti $r > 0$.) Koska K on kompakti ja $0 \notin K$, välttämättä $d(K, 0) =: R > 0$. Siispä valitsemalla $N := \lceil 1/\varepsilon R \rceil$ saadaan
$$\left|\frac{1}{nz}\right| \le \frac{1}{nR} < \varepsilon \qquad \forall z \in K,$$
kun $n > N$, joten funktiojono $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti kompakteilla joukon $D(0, r) \setminus \{0\}$ osajoukoilla funktioon $f(z) \equiv 0$. Tällä funktiolla on pisteessä 0 poistuva erikoispiste, joka <u>ei</u> ole napa.

Rajafunktiolla <u>EI</u> siis yleisesti ole napaa pisteessä P, vaikka kaikilla jonon jäsenillä olisikin.

Tapaus: oleellinen erikoispiste

Oletetaan jälleen, että $P=0$, ja tarkastellaan tällä kertaa funktioita $f_n(z) := \frac{1}{n} e^{1/z}$. Näillä kaikilla on oleellinen erikoispiste pisteessä 0. Olkoot jälleen $\varepsilon > 0$ ja kompakti $K \subset D(0,r) \setminus \{0\}$ mielivaltaisia. Asetetaan $R := d(K,0) > 0$ ja $N := \lceil e^{1/R}/\varepsilon \rceil$. Tällöin

$$\left|\frac{1}{n} e^{1/z}\right| = \frac{1}{n}\left|e^{1/z}\right| \leq \frac{1}{n} e^{|1/z|} = \frac{1}{n} e^{1/|z|} \leq \frac{1}{n} e^{1/R} < \varepsilon$$

kaikilla $z \in K$, kun $n > N$, koska $|z| \geq R$ kaikilla $z \in K$. Siispä jälleen tarkasteltava funktiojono suppenee kompakteilla osajoukoilla funktioon $f(z) \equiv 0$, jolla (jälleen) on pisteessä P ainoastaan poistuva erikoispiste.

Tässäkään tapauksessa rajafunktiolla <u>ei</u> siis yleisesti ole oleellista erikoispistettä pisteessä P.

Tapaus: poistuva erikoispiste

Jatketaan kukin funktio f_n holomorfisesti pisteeseen P. Olkoon $0 < R < r$. Rengas $\overline{D(P,R)} \setminus D(P,\alpha R) =: K$ $(0 < \alpha \leq 1/3)$ on kompakti, joten on olemassa N siten, että

$$|f(z) - f_n(z)| < \left(\max_{z \in K} |f(z)|\right) \vee 1$$

kaikilla $z \in K$, kun $n > N$. Holomorfinen funktio on (mm.) jatkuva ja jatkuva funktio taas kompaktilla joukolla rajoitettu, joten

$$0 < \left(\max_{z \in K} |f(z)|\right) \vee 1 < \infty \,!$$

Nyt siis

$$|f_n(z)| < 2\cdot\left(\max_{z\in K}|f(z)| \vee 1\right),$$

kun $n > N$ ja $z \in K$. Siispä funktiojono $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ on tasaisesti rajoitettu joukolla K vakiolla

$$M := \left(\max_{n=1,\dots,N}\max_{z\in K}|f_n(z)|\right) \vee 2\cdot\left(\max_{z\in K}|f(z)| \vee 1\right).$$

Holomorfisten funktioiden maksimiperiaatteen mukaan

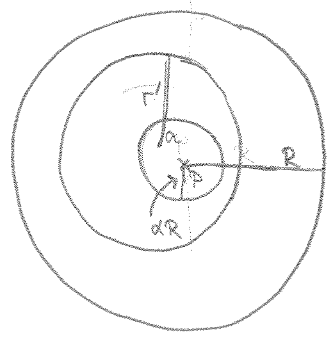
$$|f(a)| \le \max_{0\le\theta<2\pi}|f(a+r'e^{i\theta})|.$$

Koska kaikilla $a \in D(P,\alpha R)$ on olemassa $r' > 2\cdot\alpha R$ siten, että

$$|a-P| + r' < R$$

$(2\alpha R < \frac{2}{3}R,\ R-|a-P| > R-\alpha R > \frac{2}{3}R)$, saadaan kaikilla $a \in D(P,\alpha R)$

$$|f_n(a)| \le M.$$



kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Täten välttämättä

$$|f(z)| \le M$$

kaikilla $z \in D(P,R)\setminus\{P\}$ ja P on tosiaankin funktion f poistuva erikoispiste. $\square$

1.4 Koska ~~holomorfinen funktio~~ f ei saa alueessa $D(0,1)$ arvoa 0, on myös funktio f'/f samassa alueessa holomorfinen. Edelleen, koska $D(0,1)$ on lähtökohtaisesti avoin kiekko, on siis olemassa tässä kiekossa holomorfinen (vakiota vaille yksikäsitteinen) funktio g, jolle pätee

$$\frac{\partial}{\partial z} g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} . \qquad \text{[G-K, Thm 1.5.3]}$$

Kiinnitetään vakio siten, että

$$\exp(g(0)) = f(0). \;*$$

(Huom: edelleenkin monikäsitteisyyttä jää termin $2\pi i$ monikerran verran, mutta valitaan vain jokin näistä haaroista.)

Tarkastellaan sitten funktiota

$$f/\exp(g) = f e^{-g} .$$

Tämän derivaatta toteuttaa koko kiekossa $D(0,1)$

$$\frac{\partial}{\partial z}(f e^{-g}) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)e^{-g} + f\left(-\frac{\partial g}{\partial z}\cdot e^{-g}\right)$$
$$= f'e^{-g} - f\cdot\frac{f'}{f}\cdot e^{-g} = 0,$$

joten, koska $D(0,1)$ on yhtenäinen,

$$f(z)\,e^{-g(z)} \equiv \text{vakio} = f(0)e^{-g(0)} = 1$$

kaikilla $z \in D(0,1)$. On siis perusteltua kirjoittaa

$$g(z) = \log(f(z)),$$

koska kyseessä on eksponenttifunktion käänteisfunktio. $\square$

*Tämä on mahdollista, koska $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

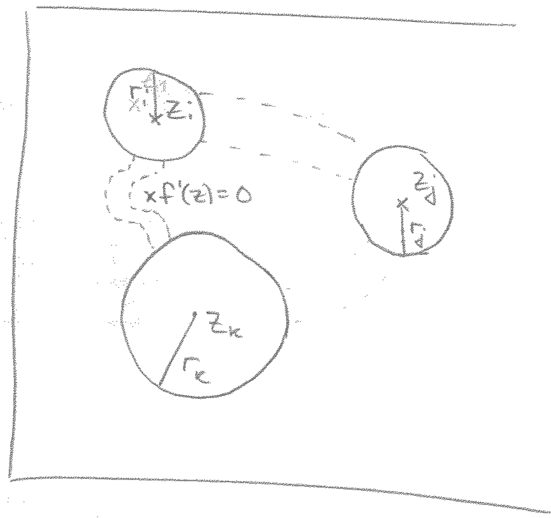
ja exp

1.5 Vastaus ~~ensimmäiseen~~ kysymykseen on kielteinen, kuten seuraava yksinkertainen esimerkki osoittaa:

Polynomit ovat holomorfisia ja n asteen polynomilla on kompleksitasossa tasan n nollakohtaa. Tarkastellaan polynomia

$$f(z) = (z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n),$$

jolla on vain yksinkertaisia juuria (eli $z_i \neq z_j$ kaikilla $i \neq j$). Erityisesti siis $f'(z_i) \neq 0$ kaikilla $i = 1, \dots, n$. Koska holomorfinen funktio on aina jatkuvasti derivoituva, on jokaisella i olemassa $r_i > 0$ siten, että $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D(z_i, r_i)$. Jos joukko U on siis muotoa $\bigcup_{i=1}^{n} D(z_i, r_i)$ se ei sisällä yhtään funktion f derivaatan nollakohtaa. Haluttaessa joukosta U on mahdollista tehdä myös yhtenäinen lisäämällä siihen ko. avoimia kiekkoja yhdistävät kapeat kaistaleet, jotka (tarpeen mukaan) kiertävät derivaatan nollakohdat.



Vastaavalla tavoin on olemassa toisia avoimia (ja yhtenäisiä) joukkoja U', jotka sisältävät mielivaltaisen määrän derivaatan nollakohtia. Suoralta kädeltä nollakohtien lukumäärästä ei siis voi sanoa mitään.

Otetaan esimerkki jälkimmäisestä vaihtoehdosta:

Funktiot $z \mapsto \sin(z)$ ja $z \mapsto \cos(z)$ ovat (oleellisesti, merkillä ei nollakohtien etsimisessä ole väliä) toistensa derivaattoja ja luonnollisesti holomorfisia. Näillä funktioilla on vuorotellen reaaliakselilla nollakohtia. Vastaavasti kuin edellä, on olemassa (loputtomasti) avoimia ~~jatkuvasti~~ yhtenäisiä joukkoja, joissa on tasan n toisen nollakohtaa ja mielivaltainen äärellinen lukumäärä toisen nollakohtia.

Huom: Joukon U sisällä olevan suljetun kiekon $\overline{D}(P,r) \subset U$ sisältämien nollakohtien lukumäärä (kertalukuineen) voidaan toki selvittää, jos derivaatta f' <u>ei</u> häviä kiekon reunalla. [G-K, Prop. 5.1.2]. Tämä tapahtuu laskemalla integraali

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - P| = r} \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\, d\zeta .$$

Tarkkaa lukumäärää mielivaltaisessa avoimessa joukossa näin ei tietenkään saada.