**Mat-1.1131 Matematiikan peruskurssi C3-I**
**Eloranta / Haimi**
**Tietokoneharjoitustehtävät**

42

# Mathematica-harjoitukset

**Tehtävä 1:** Laske `Sum`-rutiinilla Z-muunnokset jonoille

(a) $x_n = \frac{2^n}{(n+2)!}$, $n \geq 0$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, n \text{ jaollinen 3:lla,} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$

(c) $x_n = n^k$

(d) $x_n = \sin n$

(e) $x_n = \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$, $x_n = \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$

(f) $x_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$, $x_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

Sievennä tulokset joko Mathematica-rutiineilla tai paperilla. (Mathematica ei selviydy kunnialla aivan kaikista näistä; yleisesti $Z(\{\sin(n\alpha)\}) = \frac{z \sin\alpha}{1-2z\cos\alpha+z^2}$, $Z(\{\cos(n\alpha)\}) = \frac{z(z-\cos\alpha)}{1-2z\cos\alpha+z^2}$.) Onnistutko päättelemään sarjojen suppenemisalueet?

**Tehtävä 2:** Olkoon $X(z) = \text{Ln}(1 + 1/z)$, $|z| > 1$. Laske approksimaatio käänteismuunnokselle $\{x_k\}$ integroimalla numeerisesti kertoimia:

$$x_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) z^{k-1} dz.$$

Mieti $X(z)$:n singulariteetti selväksi (eli mieti, miten logaritmin singulariteetti ja haaranleikkaus menevät $X(z)$:ssa) ja vakuuttaudu, että esim. polku $|z| = 2$ (vastapäivään) käy! Parametrisoi polku ja sijoita, jolloin saat integraalin, joka on laskettavissa `NIntegrate`-rutiinilla. Laske $x_k$ muutamalle $k = 1, 2, 3, \ldots$. Entä kun $k = 0$ tai negatiivinen? Vertaa tuloksia luennolla laskettuun käänteismuunnokseen.

**Tehtävä 3:** Laske $n$:s Fibonaccin luku luentoprujun kaavalla. Huomaa, että Mathematica ei näytä sitä heti tunnistavan kokonaisluvuksi. `Simplify`. Huomaa myös, että asymptoottisesti kaavan ensimmäinen osa (joka kasvaa kultaisen leikkauksen $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ potenssina) antaa Fibonaccin lukujen kasvuvauhdin ja jälkimmäinen osa on vain äärimmäisen pieni korjaus, jolla summasta “viilataan” kokonaisluku.

**Tehtävä 4:** (Fourier-sarjoja hiukan etuajassa). Kurssin kotisivulta ladattavissa olevassa notebookissa on annettuina summat

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{2m+1}\sin(2m+1)x$$

ja

$$\pi+2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sin kx.$$

Tulosta niiden kuvaajia kasvavilla $n$:n arvoilla. Mitä huomaat? Ne ovat äärellisiä Fourier-sarjoja eräille jaksollisille, epäjatkuville funktioille. Arvaatko mille? Epäjatkuvuuskohtiin keskittyvä värähtely on nimeltään Gibbsin ilmiö. Viimeinen notebookin kohta laskee neliöllisen virheen suurutta jälkimmäiselle sarjalle. Virheen suuruus on minimaalinen juuri Fourier-sarjalle.