Mat-1.1131 Matematiikan peruskurssi C3-I
Eloranta / Haimi
Tietokoneharjoitustehtävät

40

Mathematica-harjoitukset

HUOM! Käynnistä ohjelma komennolla mathematica52.

Tehtävä 1: Reaalisen eksponenttifunktion kuvaajan saa näkyviin esimerkiksi Mathematican komennolla
`Plot[Exp[x],{x,-2,2}]`.
Kompleksista eksponenttifunktiota voidaan havainnollistaa tulostamalla
```
Plot3D[Abs[Exp[x + I*y]], {x, -2, 2}, {y, -Pi, Pi}]
Plot3D[Arg[Exp[x + I*y]], {x, -2, 2}, {y, -Pi, Pi}]
```
(Onko viimeisin tehtävissä helpommin? Mieti Eulerin kaavaa.)
```
Plot3D[Re[Exp[x + I*y]], {x, -2, 2}, {y, -Pi, Pi}]
Plot3D[Im[Exp[x + I*y]], {x, -2, 2}, {y, -Pi, Pi}]
```
Muuta `x`:n vaihteluväliä ja PlotRange-väliä, että varmasti ymmärrät tulostuksen (ja erityisesti sen, kumpi kompleksitason akseleista on kumpi!). Näyttävätkö kuvaajat täsmäävän siihen, mitä tiedät kompleksisesta eksponenttifunktiosta (jaksollisuus, kasvusuunta)?
Jos haluat katsoa kuvaajaa eri näkökulmista, sekin onnistuu: katso Mathematican helpistä komennon `Plot3D` kohdalta optiot.

Tehtävä 2: Mathematicalla voidaan kätevästi laskea erilaisia kehitelmiä ja hajotelmia. Kokeile erityisesti `ComplexExpand`-komentoa (vaikkapa `ComplexExpand[Sin[x]+I*y]]` ja vertaa tuntemaasi. Kompleksisessa integroinnissa hyödyllisiä osamurtohajotelmia voidaan taas laskea `Apart`-komennolla. Kokeile esim. `Apart[1/(1-`z^k`)]` muutamalla eri `k`:n arvolla. Näistä löytyy teoriaa Kreyszigistä (K9: 6.4).

Tehtävä 3: Mathematican funktio `Log` hyväksyy kompleksisen argumentin — ja tietyissä rajoissa laskee arvon oikein. Laske `Log[I]` ja `Log[-1`$\pm\varepsilon$`*I]` pienellä $\varepsilon > 0$. Tulosta logaritmin argumentti ja moduli sopivassa alueessa (kuten tehtävässä 1). Näyttääkö oikealta? Kokeile myös `ContourPlot`- ja `DensityPlot`-rutiineja niin, että ymmärrät, millä tavoin ne kuvaavat funktion.
Osaako Mathematica laskea I^I? Jos ei, niin miten autat sen alkuun? Laske kaikki arvot.

Tehtävä 4: Mobius-kuvaukset ovat kahden ensimmäisen asteen polynomin osamääriä. Osoittautuu, että tällainen kuvaus kuvaa aina kompleksitason suorien ja ympyröiden joukon itselleen (K8 12.9). Tutki Möbius-kuvausta $M(z) = \frac{z-z_0}{\bar{z}_0 z-1}$. Parametrisoi esim. 1/2-säteinen origokeskinen ympyrä ja tulosta sen kuva. Käytä `ParametricPlot`-rutiinia ja anna z_0:lle joitain arvoja väliltä $0 < |z_0| < 1$. Mitä huomaat?
Lataa Mathematican `ComplexMap`-paketti, siinä on useita hyödyllisiä tulostusrutiineja. Kokeile erityisesti `CartesianMap`- ja `PolarMap`-kuvaustapoja käyttäen testifunktioina z^2, $\sqrt{z}$, Möbius jne. Ymmärrätkö tulostuvien viivaparvien merkityksen? Mistä voit päätellä konformisuuden?