



Mat-1.1131 Matematiikan peruskurssi C3-I
Eloranta / Haimi
Harjoitustehtävät

42

Kotitehtävät palautetaan alkuviikon laskareihin tai huonetta U345 vastapäätä olevaan lokeriin klo 12.15 mennessä. Vastaukset kirjoitetaan joko konseptille tai nidotuille irtolehdille. Palautettaviin papereihin on ehdottomasti merkittävä kansilehteen kurssin nimi, tehtäväviikko, ryhmä, johon on ilmoittautunut, sekä oma nimi ja opiskelijanumero. Puutteelliset harjoituspaperit jätetään arvostelematta.

1 Kotitehtävät

Kotitehtävä 1: Päteekö $\operatorname{Re} \int_C f(z) dz = \int_C \operatorname{Re} f(z) dz$? Anna esimerkkejä.

Kotitehtävä 2: Etsi sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n}^{-1} z^{n+k}$ suppenemissäde (a) käyttämällä Cauchyn-Hadamardin kaavaa (b) derivoimalla sarjaa termeittäin.

Kotitehtävä 3: Kehitä $f(z) = \frac{2z-3i}{z^2-3iz-2}$ sarjaksi, joku suppenee, kun $1 < |z| < 2$.

2 Laskuharjoitukset

Tehtävä 1: Integroi $|z| + z$ vastapäivään yksikköympyrää yli.

Tehtävä 2: Olkoon $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ määritelty kiekossa $D = |z| < R$. Osoita, että jos f on parillinen (eli $f(-z) = f(z)$ kaikilla $z \in D$), niin $a_n = 0$, kun n on pariton. Osoita myös, että jos f on pariton (eli $f(-z) = -f(z)$ kaikilla $z \in D$), niin $a_n = 0$, kun n on parillinen.

Tehtävä 3: Etsi funktion f Taylorin sarja pisteessä z_0 ja määritä sarjan suppenemissäde.

(a) $f(z) = 1/z, z_0 = 1$

(b) $z^5 + z^3 - z, z_0 = i$.

Tehtävä 4: Laske $(1-z)^{-1-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$ käyttämällä (a) Cauchy-tuloa (b) derivoimalla sopiva sarja.

Tehtävä 5: Laske jonon $\left\{ \frac{1}{(n+1)!} \right\}_{n=0}^{\infty}$ Z-muunnos.

Tehtävä 6: Käänteismuunna $X(z) = \ln(1+a/z), |z| > a$, käyttäen tulosta $X'(z) = -\frac{1}{z} Z(\{nx_n\}_{n=0}^{\infty})$.