



**Mat-1.1131 Matematiikan peruskurssi C3-I**  
**Eloranta / Haimi**  
**Harjoitustehtävät**

**41**

Kotitehtävät palautetaan alkuviikon laskareihin tai huonetta U345 vastapäätä olevaan lokeriin klo 12.15 mennessä. Vastaukset kirjoitetaan joko konseptille tai nidotuille irtolehdille. Palautettaviin papereihin on ehdottomasti merkittävä kansilehteen kurssin nimi, tehtäväviikko, ryhmä, johon on ilmoittautunut, sekä oma nimi ja opiskelijanumero. Puutteelliset harjoituspaperit jätetään arvostelematta.

## 1 Kotitehtävät

**Kotitehtävä 1:** Laske

- (a)  $\oint_{C_1} \frac{dz}{z^2-1}$ , (ks. kuva)
- (b)  $\oint_C \frac{\tan(z/2)}{z^4-16} dz$ , kun  $C$  on neliö, jonka kärjet ovat pisteissä  $1, i, -1$  ja  $-i$  parametrisoituna myötäpäivään.

**Kotitehtävä 2:** Laske  $\oint_C \frac{e^{2z}}{z(z-2i)^2} dz$ , kun  $C$  on ympyrä  $|z-i|=3$  parametrisoituna vastapäivään ja ympyrä  $|z|=1$  parametrisoituna myötäpäivään.

**Kotitehtävä 3:** (a) Etsi sellainen Möbius-kuvaus  $w = f(z)$ , joka kuvaa joukon  $|z| \leq 1$  joukoksi  $|w| \leq 1$  siten, että  $z = i/2$  kuvautuu pisteeksi  $w = 0$ .

- (b) Etsi sellainen analyyttinen funktio, joka kuvaa alueen  $0 \leq \text{Arg} z \leq \pi/4$  yksikköympyräksi  $|w| \leq 1$ .

## 2 Laskuharjoitukset

**Tehtävä 1:** Osoita, että  $\oint_C (z-z_1)^{-1}(z-z_2)^{-1} dz = 0$ , kun  $C$  on suljettu polku ja  $z_1$  ja  $z_2$  ovat  $C$ :n sisällä.

**Tehtävä 2:** Laske  $\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^n}$ , missä  $C$  on ympyrä  $|z|=2$  parametrisoituna vastapäivään ja  $a$  mielivaltainen vakio.

**Tehtävä 3:** Laske  $\oint_C \frac{e^{z/2}}{(z-a)^4}$ , missä  $C$  on ympyrä  $|z-2-i|=3$  parametrisoituna vastapäivään.

**Tehtävä 4:** Suppenevatko seuraavat sarjat?

- (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+2i)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

**Tehtävä 5:** Etsi sarjan  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$  suppenemissäde ja suppenemiskeskipiste.

**Tehtävä 6:** Laske sarjan  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n-1)}{n^n} z^{2n-2}$  suppenemissäde käyttäen Cauchyn-Hadamardin kaavaa sekä termeittäisen integroinnin menetelmää.