

Mat-1.1131 Matematiikan peruskurssi C3-I
Eloranta / Haimi
Harjoitustehtävät

40

Kotitehtävät palautetaan alkuviikon laskareihin tai huonetta U345 vastapäätä olevaan lokeriin klo 12.15 mennessä. Vastaukset kirjoitetaan joko konseptille tai nidotuille irtolehdille. Palautettaviin papereihin on ehdottomasti merkittävä kansilehteen kurssin nimi, tehtäväviikko, ryhmä, johon on ilmoittautunut, sekä oma nimi ja opiskelijanumero. Puutteelliset harjoituspaperit jätetään arvostelematta.

1 Kotitehtävät

Kotitehtävä 1: Määritä ja piirrä annetun joukon kuva kuvauksessa f :

- (a) $-\pi/4 < \text{Arg}z < \pi/4, |z| < \frac{1}{2}; f(z) = z^3$
 (b) $x \geq 0, y \geq 0, |z| \leq 4; f(z) = z^2$.

Kotitehtävä 2: Etsi analyyttinen funktio, joka kuvaa kompleksitason toisen neljänneksen yksikköympyrän sisälle.

Kotitehtävä 3: Mille poluille C seuraa Cauchyn integraalilauseesta

- (a) $\oint_C \frac{dz}{z} = 0$
 (b) $\oint_C \frac{\cos z}{z^6 - z^2} dz = 0$
 (c) $\oint_C \frac{e^{1/z}}{z^2 + 9} dz = 0?$

2 Laskuharjoitukset

Tehtävä 1: Osoita, että Möbius-kuvauksen $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0$ käänteiskuvauksen $g(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ kerroinmatriisi on f :n kerroinmatriisin käänteismatriisi, jos $ad - bc = 1$. Osoita lisäksi, että Möbius-kuvausten kerroinmatriisien kertolasku vastaa kuvausten yhdistämistä.

Tehtävä 2: (a) Laske joukon $0 < \text{Re}z < \pi/6$ kuva kuvauksessa $f(z) = \sin z$.

- (b) Määritä kaikki kompleksitason pisteet, joissa \sin ei ole konforminen.

Tehtävä 3: Laske

- (a) $\oint \tan z^2,$

(b) $\oint \bar{z}^2$

vastapäivään yksikköympyrän yli.

Tehtävä 4: Laske $\oint \frac{7z-6}{z^2-2z} dz$ vastapäivään ympyrän $|z-1|=2$ yli.

Tehtävä 5: Laske $\oint \frac{z+2}{z-2} dz$ vastapäivään ympyrän $|z-1|=2$ yli.

Tehtävä 6: Laske $\oint \frac{\sin z}{z^2-2iz} dz$ vastapäivään ympyröiden $|z|=3$ ja $|z|=1$ yli.