

**Mat-1.1131 Matematiikan peruskurssi C3-I**  
**Eloranta / Haimi**  
**Harjoitustehtävät**

# 39

Kotitehtävät palautetaan alkuviikon laskareihin tai huonetta U345 vastapäätä olevaan lokeriin ke klo 12.15 mennessä. Vastaukset kirjoitetaan joko konseptille tai nidotuille irtolehdille. Palautettaviin papereihin on ehdottomasti merkittävä kansilehteen kurssin nimi, tehtäväviikko, ryhmä, johon on ilmoittautunut, sekä oma nimi ja opiskelijanumero. Puutteelliset harjoituspaperit jätetään arvostelematta.

## 1 Kotitehtävät

**Kotitehtävä 1:** Etsi kaikki kompleksiluvut  $z$ , joille,

- (a)  $e^z$  on reaalinen
- (b)  $|e^{-z}| < 1$
- (c)  $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$

**Kotitehtävä 2:** Johda epäyhtälöt  $|\sinh y| \leq |\cos z| \leq \cosh y$  ja  $|\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y$ , kun  $z = x + yi$ . Päätele, että kompleksinen sini ja kosini eivät ole rajoitettuja kompleksitasossa.

**Kotitehtävä 3:** Osoita, että  $\ln i^2$  arvot poikkeavat  $2 \ln i$ :n arvoista.

## 2 Laskuharjoitukset

**Tehtävä 1:** Laske

- (a)  $-i \sinh(-\pi + 2i)$
- (b)  $\sin(2 + \pi i)$

**Tehtävä 2:** Osoita, että

- (a)  $\operatorname{Re} \tan z = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sinh^2 y}$
- (b)  $\operatorname{Im} \tan z = \frac{\sinh x \cosh x}{\cos^2 x + \sinh^2 y}$

**Tehtävä 3:** Osoita, että

- (a)  $\cos$  on parillinen (eli  $\cos(-z) = \cos z$ ) ja  $\sin$  pariton (eli  $\sin(-z) = -\sin z$ ).

(b)  $\cosh^2 z + \sinh^2 z = \cosh 2z$ .

**Tehtävä 4:** (a) Laske  $\ln(4 + 3i)$ .

(b) Ratkaise  $z$  yhtälöstä  $\ln z = e - \pi i$ .

**Tehtävä 5:** Ratkaise  $i^{\frac{1}{2}}$  ja  $\sqrt[4]{-1}$ . Ovatko joukot samat?

**Tehtävä 6:** (a) Piirrä ja esitä parametrimuodossa jana  $a + bi$ :stä  $c + di$ :hin.

(b) Piirrä ja esitä parametrimuodossa joukko  $|z - 3 + 3i| = 4$  (vastapäivään).

(c) Laske integraali  $\oint_C \cos^2 z dz$ , kun  $C$  on polku  $-\pi i$ :stä  $\pi i$ :hin ympyränkaarta  $|z| = \pi$  pitkin oikeassa puolitasossa.