$\eta > 0$, lause 2.21 $\Rightarrow \exists\ r > 0$ s.e.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \, dx < \frac{\eta}{2(\|\phi\|_1^p + 1)} \quad \forall\, y \in B(0,r)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_\varepsilon(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \, dx \right) dy$$

$$= \int_{B(0,r)} \ldots \, dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \ldots \, dy$$

$$\Rightarrow \|\phi\|_1^{\frac{p}{p'}} \int_{B(0,r)} |\phi_\varepsilon(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \, dx \right) dy$$

$$\leq \frac{\eta}{2} \frac{\|\phi\|_1^{\frac{p}{p'}+1}}{\|\phi\|_1^p + 1} \leq \frac{\eta}{2}$$

$\frac{p}{p'} + 1 = p$

Lemma 4.6 (ii) $\Rightarrow \exists\ \varepsilon' > 0$ s.e.

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} |\phi_\varepsilon(y)| \, dy < \frac{\eta}{2^{p+2}\left(\|f\|_p^p \|\phi\|_1^{\frac{p}{p'}} + 1\right)},$$

kun $0 < \varepsilon < \varepsilon'$

$$\Rightarrow \|\phi\|_1^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^m \setminus B(0,r)} |\phi_\varepsilon(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y) - f(x)|^p \, dx \right) dy$$

$$\leq 2^{p+1} \|\phi\|_1^{\frac{p}{p'}} \|f\|_p^p \int_{\mathbb{R}^m \setminus B(0,r)} |\phi_\varepsilon(y)| \, dy < \frac{\eta}{2},$$

kun $0 < \varepsilon < \varepsilon'$

$$|f(x-y) - f(x)| \leq 2^p \left(|f(x-y)|^p + |f(x)|^p \right)$$

$$\Rightarrow \|f * \phi_\varepsilon - af\|_p^p < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta$$

$\square$

4.8. <u>Lause</u>. Jos $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$ ja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, niin $f * \phi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ ja

$$D^\alpha (f * \phi_\varepsilon)(x) = (f * D^\alpha \phi_\varepsilon)(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon > 0$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}. \quad \text{(multi-indeksi)}$$

VAROITUS: $f * \phi_\varepsilon \notin C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ (yleensä)

<u>Huomautus</u>. Lause 4.8 ja lause 4.7 $\Rightarrow$ $C^\infty(\mathbb{R}^m) \cap L^p(\mathbb{R}^m)$ on tiheä $L^p(\mathbb{R}^m)$:ssä, kun $1 \leq p < \infty$.

Tod: $e_i = (0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i:s}}{1}, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, n$, $\cancel{h \neq 0}$
$0 < |h| < 1$, $h \in \mathbb{R}$

$$\frac{(f * \phi_\varepsilon)(x + he_i) - (f * \phi_\varepsilon)(x)}{h}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{h} \left[\phi\left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon} \right) - \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) \right] f(y)\, dy$$

Väite: $\frac{1}{h} \left[\phi\left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon} \right) - \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) \right] \longrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right)$,

kun $h \to 0$

Syy: $\varphi(x) = \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right)$.

$$\varphi(x + he_i) - \varphi(x) = \int_0^h \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x + te_i)\, dt$$

$$= \int_0^h D\varphi(x + te_i) \cdot e_i\, dt \qquad \left(D\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right) = \text{gradientti} \right)$$

$$= \int_0^h \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x + te_i)\, dt$$

$$\Rightarrow |\varphi(x+he_i) - \varphi(x)|$$

$$\leq \int_0^{|h|} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x+te_i) \right| dt$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{|h|} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\left(\frac{x+te_i-y}{\varepsilon} \right) \right| dt$$

$$\leq \frac{|h|}{\varepsilon} \|D\phi\|_\infty$$

$$K = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \frac{x-y}{\varepsilon} \in \operatorname{supp}\phi \text{ tai } \frac{x+he_i-y}{\varepsilon} \in \operatorname{supp}\phi ,\ 0 < |h| < 1 \right\}$$

$\Rightarrow$ K on rajoitettu, sillä $\operatorname{supp}\phi$ on kompakti

$$\frac{\partial (f * \phi_\varepsilon)}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f*\phi_\varepsilon)(x+he_i) - (f*\phi_\varepsilon)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_K \frac{1}{h}\left[\phi\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right] f(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_K \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\phi\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right] f(y)\, dy$$

LDK, $\frac{1}{\varepsilon} \|D\phi\|_\infty |f| \in L^1(K)$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_K \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)\, dy$$

$$= \int_K \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) f(y)\, dy = \left(\frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial x_i} * f\right)(x).$$

Yleinen väite saadaan iteroimalla tätä. □

4.7. <u>Seuraus</u>. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ on tiheä avaruudessa $L^p(\mathbb{R}^n)$, kun $1 \leq p < \infty$.

<u>Tod</u>: $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\eta > 0$

$\Rightarrow \exists\ g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ s.e. $\| f - g \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \frac{\eta}{2}$

ϕ_ε esimerkin 4.5 (2) standardisilottaja

<u>Väite</u>: $\operatorname{supp}(g * \phi_\varepsilon)$ on kompakti

<u>Syy</u>: $(g * \phi_\varepsilon)(x) \neq 0$

$\Rightarrow \exists\ y \in \mathbb{R}^n$ s.e. $g(y)\phi_\varepsilon(x-y) \neq 0$

$\Rightarrow g(y) \neq 0$ ja $\phi_\varepsilon(x-y) \neq 0$

$g(y) \neq 0 \Rightarrow y \in \operatorname{supp} g = K$

$\phi_\varepsilon(x-y) \neq 0 \Rightarrow |x-y| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow$ ~~xE~~ $K_\varepsilon = \{ y \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(y, K) \leq \varepsilon \}$ on kompakti

$\Rightarrow (g * \phi_\varepsilon)(x) = 0 \quad \forall \; x \in \mathbb{R}^n \setminus K_\varepsilon$

$\Rightarrow \operatorname{supp}(g * \phi_\varepsilon)$ on kompakti

Lause 4.7 $\Rightarrow \exists\, \varepsilon' > 0$ s.t.

$$\| g - (g * \phi_\varepsilon) \|_p < \frac{\eta}{2}, \text{ kun } 0 < \varepsilon < \varepsilon'$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \| f - (g * \phi_\varepsilon) \|_p &\leq \| f - g \|_p + \| g - (g * \phi_\varepsilon) \|_p \\ &< \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta . \end{aligned}$$

$\square$

VAROITUS: $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ei ole tiheä avaruudessa $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

<u>Kysymys</u>: Jos $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ja $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, niin pätеekö

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (f * \phi_\varepsilon)(x) = a f(x) \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n \ ?$$

Tämä pätee Lebesguen tiheyspistelauseen nojalla esimerkin 4.5 (i) funktiolle ϕ $(a=1)$

Lauseen 4.7 nojalla

$$f * \phi_\varepsilon \to a f \quad L^p(\mathbb{R}^n)\text{:ssä},$$

kun $\varepsilon \to 0$, joten on olemassa osajono, joka suppenee melkein kaikkialla. Tämä ei kuitenkaan kerro mitään alkuperäisen jonon suppenemisesta.

Oletetaan, että $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ toteuttaa seuraavat ehdot:

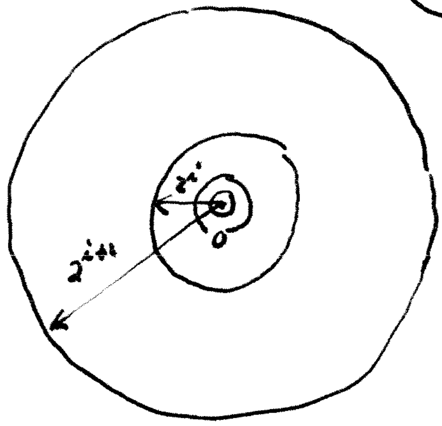
(i) $\phi(x) \geq 0$ m.k. $x \in \mathbb{R}^n$,

(ii) ϕ on radiaalinen (l. $\phi(x) = \tilde{\phi}(|x|)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$),

(iii) ϕ on radiaalisesti vähenevä (l.
$$|x| \geq |y| \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(y).)$$

4/16

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{B(0,2^{i+1})\setminus B(0,2^i)} \phi(x)\,dx$$



$$\le \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(2^i)\,\underbrace{|B(0,2^{i+1})\setminus B(0,2^i)|}_{\le |B(0,2^{i+1})|}$$

$$\le \Omega_n \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(2^i)\, 2^{in+n}$$

$$= \Omega_n 2^n \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(2^i)\, 2^{in}$$

Toisaalta

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,dx = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{B(0,2^i)\setminus B(0,2^{i-1})} \phi(x)\,dx$$

$$\ge \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(2^i)\,\underbrace{|B(0,2^i)\setminus B(0,2^{i-1})|}_{= \Omega_n (2^{in} - 2^{n(i-1)}) = \Omega_n 2^{in}(1-2^{-n})}$$

$$= \Omega_n (1-2^{-n}) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(2^i)\, 2^{in}$$

4.10. Lause. Oletetaan, että $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\phi \geq 0$, on radiaalinen ja radiaalisesti vähenevä kuten edellä ja $a = \|\phi\|_1$. Jos $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, niin

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (f * \phi_\varepsilon)(x) = a f(x) \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Tod: Todistamme, että jos x on funktion f Lebesguen piste ~~ja~~, niin

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (f * \phi_\varepsilon)(x) = a f(x).$$

Merkitään

$$g(r) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, dy$$

$$\underset{\text{muuttujan vaihto}}{=} \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} |f(x-y) - f(x)| \, dy.$$

Koska x on funktion f Lebesguen piste, niin

$$\lim_{r \to 0} g(r) = 0.$$

Tästä seuraa, että g on rajoitettu, kun $0 < r < r'$.

$$g(r) \leq \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy + |f(x)|$$

$$\leq \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}} + |f(x)|$$

Hölder

$$\leq \Omega_n^{-\frac{1}{p}}\, r^{-n/p}\, \|f\|_p + |f(x)|,$$

jolen g on rajoitettu myös, kun $r \geq r'$. Siis on olemassa $M < \infty$ s.e.

$$g(r) \leq M \quad \forall\ 0 < r < \infty.$$

$$|(f * \phi_\varepsilon)(x) - a f(x)|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, \phi_\varepsilon(y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(y)\, f(x)\, dy \right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x-y) - f(x)\big)\, \phi_\varepsilon(y)\, dy \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|\, \phi_\varepsilon(y)\, dy$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{2^i \le \frac{|y|}{\varepsilon} < 2^{i+1}} |f(x-y) - f(x)| \, \phi_\varepsilon(y) \, dy$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{2^i \le \frac{|y|}{\varepsilon} < 2^{i+1}} |f(x-y) - f(x)| \, \varepsilon^{-n} \phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy$$

$$\le \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-n} \tilde{\phi}(2^i) \int_{2^i \le \frac{|y|}{\varepsilon} < 2^{i+1}} |f(x-y) - f(x)| \, dy$$

$$\le \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-n} \tilde{\phi}(2^i) \int_{|y| < 2^{i+1}\varepsilon} |f(x-y) - f(x)| \, dy$$

$$= \Omega_n \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-n} \tilde{\phi}(2^i) \, (2^{i+1}\varepsilon)^n \, g(2^{i+1}\varepsilon)$$

$$= 2^n \Omega_n \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(2^i) \, 2^{in} \, g(2^{i+1}\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} |(f * \phi_\varepsilon)(x) - a f(x)|$$

$$\le 2^n \Omega_n \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(2^i) \, 2^{in} \, g(2^{i+1}\varepsilon)$$

$$g(r) \le M \quad \forall\, 0<r<\infty$$

$$\tilde{\phi}(2^i)\,2^{in}\,g(2^{i+1}\varepsilon) \le M\,\tilde{\phi}(2^i)\,2^{in}$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(2^i)\,2^{in} \le \frac{1}{\cancel{(2^n-1)}\,(1-2^{-n})\,\Omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,dx < \infty$$

sivulla 4/16

Sovellamme Lebesguen dominoidun konvergenssin lausetta lukumäärämitalle ja saamme

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(2^i)\,2^{in}\,g(2^{i+1}\varepsilon)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{\phi}(2^i)\,2^{in}\,g(2^{i+1}\varepsilon)$$

$$= 0, \quad \text{sillä } \lim_{\varepsilon\to 0} g(2^{i+1}\varepsilon) = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \left|(f*\phi_\varepsilon)(x) - a\,f(x)\right| = 0. \qquad \square$$

4.11. <u>Esimerkki</u>

$$\phi(x) = c(n)\,\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \text{ missä}$$

$c(n)$ on valittu s.e. $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,dx = 1.$

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^m}\,\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = c(m)\,\frac{\varepsilon}{(|x|^2+\varepsilon^2)^{\frac{m+1}{2}}}\,, \quad \varepsilon > 0$$

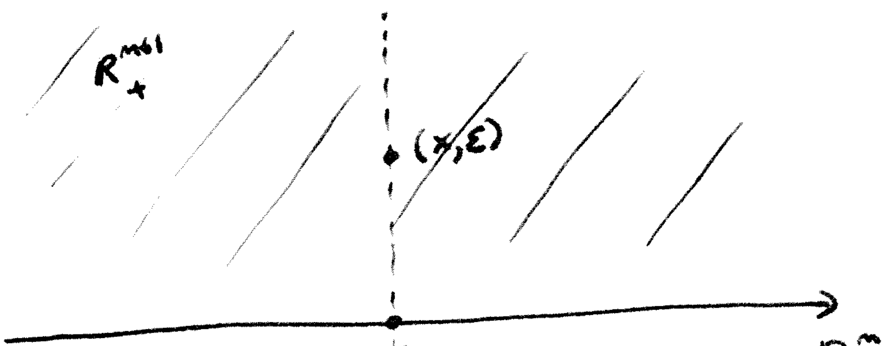
$$u(x,\varepsilon) = (f * \phi_\varepsilon)(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \phi_\varepsilon(x-y)\, f(y)\, dy \quad \text{(} f\text{:n Poissonin integraali)}$$

$$\mathbb{R}^{m+1}_+ = \{ (x_1, \dots, x_m, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{m+1} : \varepsilon > 0 \}$$

= ylempi puoliavaruus

Lause 4.10 $\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} (f * \phi_\varepsilon)(x) = f(x)$ m.k. $x \in \mathbb{R}^m$



Lause 4.8 $\Rightarrow$ $\cancel{(f*\phi_\varepsilon)(x) = u(x,\varepsilon) \in C^\infty(\mathbb{R}^{m+1}_+)}$

$\cancel{u}$ $(f*\phi_\varepsilon)(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^m) \quad \forall\, \varepsilon > 0$

Voidaan osoittaa, että

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} = 0 \quad \mathbb{R}^{m+1}_+\text{:ssa}$$

Siis $u(x,\varepsilon)$ on Dirichletin ongelman

$$\begin{cases} \Delta u(x,\varepsilon) = 0 \,, & (x,\varepsilon) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \\ u(x,0) = f(x) \,, & x \in \partial \mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \end{cases}$$

ratkaisu siinä mielessä, että

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u(x,\varepsilon) = f(x) \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Lause 4.7 $\Rightarrow$ $u(x,\varepsilon) \to f(x)$ $L^p(\mathbb{R}^n)$:ssä, kun $\varepsilon \downarrow 0$.

<u>Huomautus</u>. Toinen tapa todistaa lause 4.10 on näyttää, että on olemassa $c = c(n,\phi)$ s.e.

$$\sup_{\varepsilon > 0} |(f * \phi_\varepsilon)(x)| \le c\, Mf(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja sitten argumentoida kuten Lebesguen lauseen todistuksessa.