Huomautus.

$f \in L^1([a,b])$

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} f(y)\,dy$

$\Rightarrow F'(x) = f(x)$ m.k. $x \in [a,b]$

$$\Rightarrow F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} F'(y)\,dy \qquad (*)$$

Kysymys: Mille funktioille F kaava $(*)$ pätee? $(F \in C([a,b]))$

$F \in C^1([a,b]) \Rightarrow$ OK

$F = \chi_{[-1,1]} \Rightarrow F' = 0$ m.k., mutta $(*)$ ei päde.

Riittääkö, että f on derivoituva kaikkialla?

Vastaus: EI

Syy:
$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

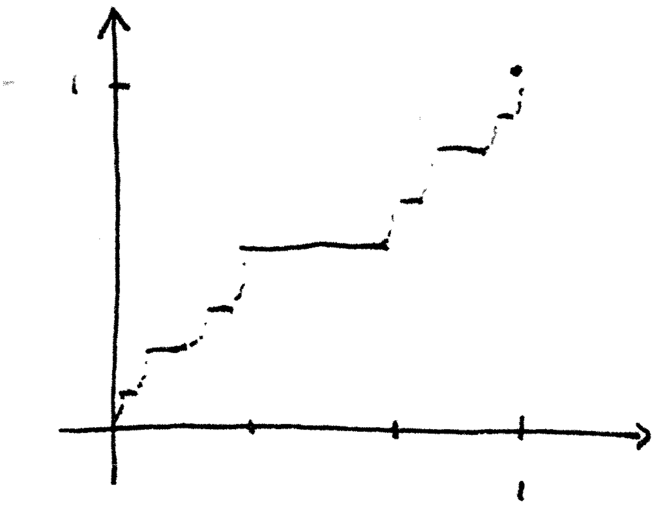
$\Rightarrow \exists\, F'(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, mutta $F' \notin L^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow (*)$ ei päde

Riittääkö, että $F \in C([a,b])$, $\exists\, F'(x)$ m.k. $x \in [a,b]$ ja $F' \in L^1([a,b])$?

<u>Vastaus</u>: EI

<u>Syy</u>: Cantorin funktio (ks. kohta 1.13)



$$\Rightarrow F(1) = 1 \neq 0 = F(0) + \int_{[0,1]} F'(y)\,dy$$

$\Rightarrow$ (*) ei päde

Itse asiassa (*):n avulla määritellään kokonainen funktioluokka: f on absoluuttisesti jatkuva, jos $\exists\, f'(x)$ m.k. $x \in [a,b]$, $f' \in L^1([a,b])$ ja

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)\,dy \quad \forall\, x \in [a,b].$$

3.16. Tiheyspisteet

$E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen joukko

$f = \chi_E$

Lebesguen lause 3.11 $\Rightarrow$

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \chi_E(y)\,dy$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{|E \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} = \chi_E(x) \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n$$

Piste $x \in \mathbb{R}^n$ on joukon E tiheyspiste, jos

$$\lim_{r \to 0} \frac{|E \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} = 1 .$$

$E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen $\Rightarrow$ m.k. $x \in E$ on tiheyspiste

Samalla tavalla

$$\lim_{r \to 0} \frac{|E \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} = 0 \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n \setminus E .$$

<u>Määritelmän tarkoitus</u>: Tiheyspisteet ovat mittateoreettisia sisäpisteitä ja pisteet, joissa tiheys on nolla kuuluvat mittateoreettiseen komplementtiin.

Esimerkki: $I_i = \left[\frac{1}{2^{2i+1}}, \frac{1}{2^{2i}}\right]$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$|I_i| = \frac{1}{2^{2i}} - \frac{1}{2^{2i+1}} = \frac{1}{2^{2i}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2i+1}}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

$$E \cap B\left(0, \frac{1}{2^{2k}}\right) = \bigcup_{i=k}^{\infty} I_i$$

$$\Rightarrow \left|E \cap B\left(0, \frac{1}{2^{2k}}\right)\right| = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^{2i+1}} = \frac{4}{3} \frac{1}{2^{2k+1}}$$

$$E \cap B\left(0, \frac{1}{2^{2k+1}}\right) = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} I_i$$

$$\Rightarrow \left|E \cap B\left(0, \frac{1}{2^{2k+1}}\right)\right| = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i+1}} = \frac{4}{3} \frac{1}{2^{2k+3}}$$

Siis

$$\frac{\left|E \cap B\left(0, \frac{1}{2^{2k}}\right)\right|}{\left|B\left(0, \frac{1}{2^{2k}}\right)\right|} = \frac{4}{3} \frac{1}{2^{2k+1}} \cdot \frac{2^{2k}}{2} = \frac{1}{3}$$

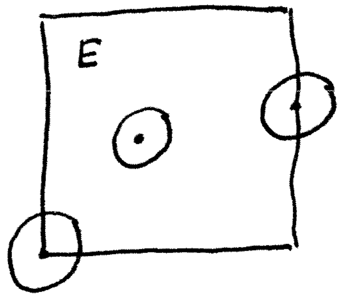
ja

$$\frac{\left|E \cap B\left(0, \frac{1}{2^{2k+1}}\right)\right|}{\left|B\left(0, \frac{1}{2^{2k+1}}\right)\right|} = \frac{4}{3} \frac{1}{2^{2k+3}} \cdot \frac{2^{2k+1}}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{r \to 0} \frac{|E \cap B(0, r)|}{|B(0, r)|}$$

Esimerkki:

(1) $E = \{ x \in \mathbb{R}^2 : |x_i| < 1,\ i = 1,2 \}$



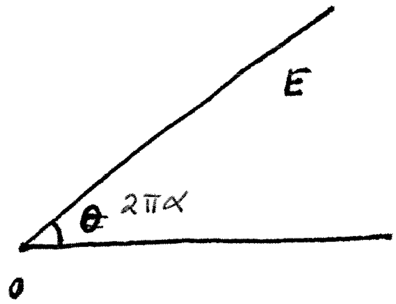
$$\lim_{r \to 0} \frac{|E \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|}$$

$$= \begin{cases} 1, & x \in E, \\ \frac{1}{2}, & x \in \partial E \setminus \{\text{kulmat}\}, \\ \frac{1}{4}, & x \in \{\text{kulmat}\}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{E} \end{cases}$$

(2) $E = \{ x = re^{i\theta} : r > 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\alpha \},\quad 0 < \alpha < 1$

$$\lim_{r \to 0} \frac{|E \cap B(0,r)|}{|B(0,r)|}$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{\overset{2\pi\alpha}{\cancel{\theta}}}{2\pi} = \alpha$$



4. Konvoluutioapproksimaatio

4.1. Määritelmä. Oletetaan, että $f, g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ ovat mitallisia funktioita. Konvoluutio $f * g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\, dy$$

on määritelty, jos funktio $y \mapsto f(y) g(x-y)$ on integroituva m.k. $x \in \mathbb{R}^n$.

VAROITUS: $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \not\Rightarrow fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Huomautus. (1) $(x, y) \mapsto f(y) g(x-y)$ on mitallinen. (Tämän todistus sivuutetaan.)

(2) Jos $f, g \geq 0$, niin konvoluutio on määritelty aina.

Ongelma: Voidaanko $f * g$ määritellä, jos ei oleteta että $f, g \geq 0$? Milloin $f * g < \infty$ m.k.?

4.2. Lause. (Youngin epäyhtälö)

Jos $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ ja $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, niin $(f * g)(x)$ on olemassa m.k. $x \in \mathbb{R}^n$ ja

$$\| f * g \|_p \leq \| f \|_p \| g \|_1 .$$

Tod: $\boxed{p=1}$: $\displaystyle |(f*g)(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dy$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dy\,dx$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|\,dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\,dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,dy \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\,dx = \|f\|_1 \|g\|_1$$

$\Rightarrow f(\cdot)\,g(x-\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ m.k. $x \in \mathbb{R}^n$

$\boxed{p=\infty}$: $\displaystyle |(f*g)(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dy$

$$\le \operatorname*{ess\,sup}_{y\in\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|\,dy$$

$$= \|f\|_\infty \|g\|_1$$

$$\Rightarrow \|f*g\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_1$$

$\boxed{1 < p < \infty}$:

$$|(f * g)(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,|g(x-y)|^{\frac{1}{p}}\,|g(x-y)|^{\frac{1}{p'}}\,dy$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$$\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p\,|g(x-y)|\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|\,dy\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Hölder

$$\Rightarrow |(f*g)(x)|^p \le \|g\|_1^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p\,|g(x-y)|\,dy$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|^p\,dx$$

$$\le \|g\|_1^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p\,|g(x-y)|\,dy\,dx$$

$$= \|g\|_1^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|\,dx\right) dy$$

Fubini

$$= \|g\|_1^{\frac{p}{p'}}\,\|g\|_1\,\|f\|_p^p = \|g\|_1^p\,\|f\|_p^p. \qquad \square$$

$\frac{p}{p'} + 1 = p \cdot \frac{p-1}{p} + 1 = p$

<u>Huomautus</u>. $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \setminus L^2(\mathbb{R}^n)$ s.e. $f(x) = f(-x)$

Young $\Rightarrow (f * f)(x) < \infty$ m.k. $x \in \mathbb{R}^n$

$$(f * f)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) f(-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^2\, dy = \infty$$

$\Rightarrow$ $f * f$ ei ole jatkuva 0:ssa.

4.3. <u>Lause</u>. Oletetaan, että $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(i) $f * g = g * f$ (kommutatiivisuus)

(ii) $f * (g * h) = (f * g) * h$ (assosiatiivisuus)

(iii) $(\alpha f + \beta g) * h = \alpha (f * h) + \beta (g * h)$ (distributiivisuus)

<u>Tod</u>: Harjoitustehtävä. $\square$

4.4. <u>Merkintä</u>. $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

4.5. Esimerkkejä.

(1) $$\phi(x) = \frac{\chi_{B(0,1)}(x)}{|B(0,1)|}$$

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{\chi_{B(0,1)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{|B(0,1)|} = \frac{\chi_{B(0,\varepsilon)}(x)}{|B(0,\varepsilon)|}, \quad \varepsilon > 0$$

$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$

$$(f * \phi_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, \phi_\varepsilon(x-y)\, dy$$

$$= \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|} \int_{B(x,\varepsilon)} f(y)\, dy \quad \text{(integraalikeskiarvo)}$$

$$\| f * \phi_\varepsilon \|_1 \underset{\text{Young}}{\leq} \| f \|_1 \, \| \phi_\varepsilon \|_1 = \| f \|_1$$

$\| \phi_\varepsilon \|_1 = 1 \quad \forall\, \varepsilon > 0$

(2) $$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right), & x \in B(0,1), \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,1) \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (kompaktikantajainen sileä)

$\Rightarrow \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja $0 < \| \varphi \|_1 < \infty$

$$\phi(x) = \frac{\varphi(x)}{\|\varphi\|_1}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \phi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \operatorname{supp} \phi_\varepsilon = \overline{B(0,\varepsilon)}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x)\,dx = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\, \varepsilon^n\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\,dy$$

$y = \frac{x}{\varepsilon} \Rightarrow$ "$dx = \varepsilon^n dy$"

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x)}{\|\varphi\|_1}\,dx = \frac{\|\varphi\|_1}{\|\varphi\|_1} = 1 \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \|f * \phi_\varepsilon\|_1 \le \|f\|_1, \quad \varepsilon > 0$$

Young

ϕ_ε on ns. standardisilottaja

4.6. <u>Lemma</u>. $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,dx$ kaikilla $\varepsilon > 0$.

(ii) $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} |\phi_\varepsilon(x)|\,dx = 0$ kaikilla $r > 0$.

(Tämä on selvä kompaktikantajaiselle ϕ.)

<u>Tod</u>: $\boxed{(i)}$: Muuttujanvaihto.

$\boxed{(ii)}$:
$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,r)} |\phi_\varepsilon(x)|\,dx = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,r)} \left|\phi\left(\tfrac{x}{\varepsilon}\right)\right|\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\frac{r}{\varepsilon})} |\phi(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|\,\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\frac{r}{\varepsilon})}(x)\,dx$$

$y = \frac{x}{\varepsilon} \Rightarrow$ "$dx = \varepsilon^n dy$"

$$\longrightarrow 0$$

LDK, $|\phi|\,\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\frac{r}{\varepsilon})} \le |\phi| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\square$

4.7. <u>Lause</u>. Oletetaan, että $\phi\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $a = \int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)\,dx$ ja $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$. Silloin

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \| \phi_\varepsilon * f - af \|_p = 0.$$

VAROITUS: Lause ei päde, kun $p=\infty$.

<u>Huomaa</u>: Jos ϕ on esimerkin 4.5 (1) funktio, niin Lebesguen lauseen nojalla $\lim_{\varepsilon\to 0}\phi_\varepsilon * f = f$ m.k. Tästä ei kuitenkaan seuraa konvergenssi $L^p(\mathbb{R}^n)$:ssä.

Tod:

$$a\, f(x) = f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\, dy$$

$$\underset{\text{lemma 4.6 (ii)}}{=} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \phi_\varepsilon(y)\, dy$$

$$\Rightarrow \left| (f * \phi_\varepsilon)(x) - a\, f(x) \right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x-y) - f(x) \big)\, \phi_\varepsilon(y)\, dy \right|$$

$$\underset{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} | f(x-y) - f(x) |\, |\phi_\varepsilon(y)|^{\frac{1}{p}}\, |\phi_\varepsilon(y)|^{\frac{1}{p'}}\, dy$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \left| (f * \phi_\varepsilon)(x) - a\, f(x) \right|^p dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} | f(x-y) - f(x) |^p\, |\phi_\varepsilon(y)|\, dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_\varepsilon(y)|\, dy \right)^{\frac{p}{p'}}$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \|\phi\|_1^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_\varepsilon(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} | f(x-y) - f(x) |^p\, dx \right) dy$$