$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|\,dx = \int_{\cancel{\mathbb{R}^n}\,\{x\in\mathbb{R}^n :\, |f(x)|>\frac{\lambda}{2}\}} |f_1(x)|^p\,|f_1(x)|^{1-p}\,dx$$

$$\leq \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1-p} \|f\|_p^p < \infty$$

$$|f_1(x)| > \frac{\lambda}{2} \quad \forall\, \cancel{x\in\mathbb{R}^n}\; x\in\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|>\frac{\lambda}{2}\},\quad p>1$$

$$\Rightarrow f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$|f_2(x)| \leq \frac{\lambda}{2} \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n \Rightarrow \|f_2\|_\infty \leq \frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow f_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$Mf(x) = M(f_1+f_2)(x)$$

$$\leq Mf_1(x) + Mf_2(x)$$

lemma 3.2

$$\leq Mf_1(x) + \frac{\lambda}{2}$$

$$\|Mf_2\|_\infty \leq \|f_2\|_\infty \leq \frac{\lambda}{2}$$

lemma 3.5

$$\Rightarrow \left|\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>\lambda\}\right|$$

$$\leq \left|\{x\in\mathbb{R}^n : Mf_1(x)>\frac{\lambda}{2}\}\right|$$

$$Mf(x)>\lambda \Rightarrow Mf_1(x)>\frac{\lambda}{2}$$

$$\leq \frac{2\cdot 5^n}{\lambda}\|f_1\|_1$$

lause 3.7

$$= \frac{2\cdot 5^n}{\lambda}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|>\frac{\lambda}{2}\}} |f(x)|\,dx \quad \forall\ \lambda>0$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |Mf|^p\,dx = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left|\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>\lambda\}\right|\,d\lambda$$

lemma 3.10

$$\leq p\cdot 2\cdot 5^n\int_0^\infty \lambda^{p-2}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|>\frac{\lambda}{2}\}} |f(x)|\,dx\,d\lambda$$

$$= p\cdot 2\cdot 5^n\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\int_0^{2|f(x)|}\lambda^{p-2}\,d\lambda\,dx$$

kuten lemman 3.10 todistuksessa

$$= \frac{p\cdot 2\cdot 5^n}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,|2f(x)|^{p-1}\,dx$$

$$= \frac{p\cdot 2^p\cdot 5^n}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx. \qquad \square$$

3.11. <u>Lause.</u> (Lebesgue) Oletetaan, että $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Silloin

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, dy = 0$$

melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

<u>Huomaa</u>: Erityisesti

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) \, dy = f(x)$$

melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

<u>Syy</u>:
$$\left| \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) \, dy - f(x) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} (f(y) - f(x)) \, dy \right|$$

$$\leq \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, dy \to 0 \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^n$$

<u>Huomaa</u>:
$$|f(x)| = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy$$

$$\leq \sup_{r > 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy = Mf(x)$$

m.k. $x \in \mathbb{R}^n$

<u>Lauseen 3.11. tod</u>: Voimme olettaa, että $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sillä kysymys on lokaali (voimme tarkastella funktioita $f_i = f\chi_{B(0,i)}$, $i = 1, 2, \ldots$)

Määritellään

$$f^*(x) = \limsup_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy.$$

<u>Väite</u>: $f^*(x) = 0$ m.k. $x \in \mathbb{R}^n$.

$\boxed{(1)}$: $f^* \geq 0$

$\boxed{(2)}$: $(f+g)^* \leq f^* + g^*$

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |(f+g)(y) - (f+g)(x)|\, dy$$

$$\leq \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy + \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)|\, dy$$

$\boxed{(3)}$: g jatkuva pisteessä $x \Rightarrow g^*(x) = 0$

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ s.e. $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$, kun $|x - y| < \delta$

$$\Rightarrow \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)|\, dy < \varepsilon, \text{ kun } 0 < r \leq \delta$$

$\boxed{(4)}$: $g \in C(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (f-g)^* = f^*$

$$\left.\begin{aligned} (f-g)^* &\underset{(2)}{\leq} f^* + (-g)^* \underset{(3)}{=} f^* \\ f^* &\underset{(2)}{\leq} (f-g)^* + g^* \underset{(3)}{=} (f-g)^* \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{"="} \text{ pätee}$$

$\boxed{(5)}$: $f^* \leq Mf + |f|$

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, dy$$

$$\leq \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy + |f(x)|$$

$$\leq Mf(x) + |f(x)|$$

$\boxed{(6)}$: $f^*(x) > \lambda \underset{(5)}{\Longrightarrow} Mf(x) + |f(x)| > \lambda$

$$\Rightarrow Mf(x) > \frac{\lambda}{2} \text{ tai } |f(x)| > \frac{\lambda}{2}$$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > \lambda\}|$$

$$\leq |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \tfrac{\lambda}{2}\}| + |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \tfrac{\lambda}{2}\}|$$

$$\leq \frac{2 \cdot 5^n}{\lambda} \|f\|_1 + \frac{2}{\lambda} \|f\|_1 = \frac{2(5^n+1)}{\lambda} \|f\|_1$$

lause 3.7 ja Chebyshev

Lause 2.20 $\Rightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ s.e.

$$\|f-g\|_1 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > \lambda\}|$$

$$\underset{\overset{\uparrow}{(4)}}{=} |\{x \in \mathbb{R}^n : (f-g)^*(x) > \lambda\}|$$

$$\underset{\overset{\uparrow}{(6)}}{\leq} \frac{2(5^n+1)}{\lambda}\|f-g\|_1 < \frac{2(5^n+1)}{\lambda}\varepsilon$$

$$\underset{\overset{\uparrow}{\varepsilon \to 0}}{\Rightarrow} |\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > \lambda\}| = 0 \quad \forall\, \lambda > 0$$

$$\Rightarrow |\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > 0\}|$$

$$= \left|\bigcup_{i=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > \tfrac{1}{i}\}\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{|\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > \tfrac{1}{i}\}|}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow f^*(x) \leq 0 \text{ m.k. } x \in \mathbb{R}^n$$

$$\underset{\overset{\uparrow}{(1)}}{\Rightarrow} f^*(x) = 0 \text{ m.k. } x \in \mathbb{R}^n. \qquad \square$$

3.12. <u>Määritelmä</u>. Jos $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, niin $x \in \mathbb{R}^n$ on funktion f Lebesguen piste, jos on olemassa sellainen $a \in \mathbb{R}$ että

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - a| \, dy = 0 .$$

<u>Huomautuksia</u> (1) x Lebesguen piste

$$\Rightarrow \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) \, dy = a$$

$\Rightarrow$ a on yksikäsitteinen

(2) Jos $f = g$ m.k., niin f:n ja g:n Lebesguen pisteiden joukot ovat samat. Siis Lebesguen pisteiden joukko on hyvin määritelty ekvivalenssiluokille $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$:ssä.

(3) Se että x on f:n Lebesguen piste on täysin riippumaton f:n arvosta pisteessä x. Itse asiassa f:n ei tarvitse olla edes määritelty pisteessä x.

Esimerkki.

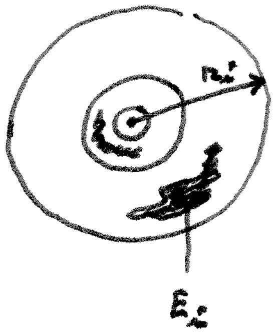
$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad \text{(Heavisiden funktio)}$$

$$\Rightarrow \lim_{r \to 0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} H(y)\,dy = H(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

mutta 0 ei ole H:n Lebesguen piste

Syy:
$$\frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} |H(y) - a|\,dy$$
$$= \frac{1}{2r} \int_{-r}^{0} |a|\,dy + \frac{1}{2r} \int_{0}^{r} |1-a|\,dy$$
$$= \frac{1}{2}|a| + \frac{1}{2}|1-a| \neq 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

3.13. **Määritelmä.** Jono $E_1, E_2, \ldots$ mitallisia joukkoja suppenee säännöllisesti pisteeseen $x \in \mathbb{R}^n$, jos on olemassa vakio $c > 0$ ja $r_1, r_2, \ldots$ s.e.



(i) $E_i \subset B(x, r_i)$, $i = 1, 2, \ldots$,

(ii) $\lim_{i \to \infty} r_i = 0$, ja

(iii) $|E_i| \le |B(x, r_i)| \le c\,|E_i|$, $i = 1, 2, \ldots$

Huomautus. (1) Ehdoista (i) ja (ii) seuraa, että joukot E_i "suppenevat" kohti pistettä x ja ehto (iii) takaa sen, että suppeneminen ei ole liian nopeaa mitan mielessä (jokainen E_i täyttää vähintään tietyn prosenttiosuuden $B(x,r_i)$:n tilavuudesta).

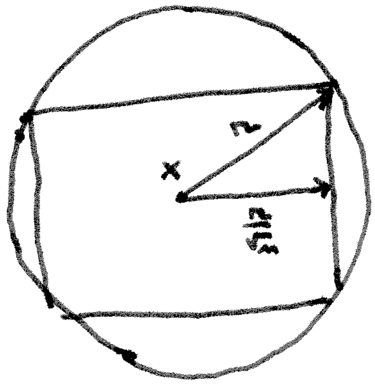
(2) Pisteen x ei tarvitse kuulua joukkoihin E_i.

Esimerkki.

(1) $Q(x,\ell) = \{ y \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < \frac{\ell}{2},\ i = 1,\dots,n \}$

$=$ x-keskinen avoin kuutio, jonka särmän pituus on ℓ

Väite: $Q(x, \frac{2}{\sqrt{n}} r) \subset B(x,r)$



Syy: $y \in Q(x, \frac{2}{\sqrt{n}} r)$

$\Rightarrow |y_i - x_i| < \frac{r}{\sqrt{n}},\ i = 1,\dots,n$

$$\Rightarrow |y - x| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < \Big(n \cdot \big(\frac{r}{\sqrt{n}} \big)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = r$$

$\Rightarrow y \in B(x,r)$

$$|B(x,r)| = \frac{|B(x,r)|}{|Q(x,\frac{2}{\sqrt{m}}r)|}\,|Q(x,\tfrac{2}{\sqrt{m}}r)|$$

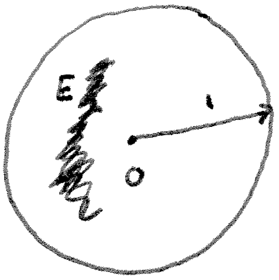
$$= \frac{\Omega_m \cancel{r^m}}{\left(\frac{2}{\sqrt{m}}\right)^m \cancel{r^m}}\,|Q(x,\tfrac{2}{\sqrt{m}}r)|$$

$\Omega_m = |B(0,1)|$

$$= c\,|Q(x,\tfrac{2}{\sqrt{m}}r)|\,, \quad c = \frac{\Omega_m\, m^{\frac{m}{2}}}{2^m}$$

(2) *Olkoon* $E \subset B(0,1)$ *mitallinen joukko s.e.* $|E| > 0$.

$$E_r(x) = x + rE$$
$$= \{\, y \in \mathbb{R}^m : y = x + rz\,,\ z \in E \,\}$$



$$E_r(x) \subset x + r\,B(0,1) = B(x,r)$$

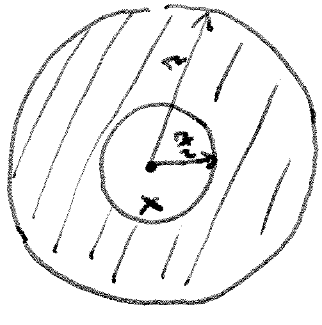
$$|B(x,r)| = \frac{|B(x,r)|}{|E_r(x)|}\,|E_r(x)|$$

$$= \frac{\cancel{r^m}\,|B(0,1)|}{\cancel{r^m}\,|E|}\,|E_r(x)|$$

$$= c\,|E_r(x)|\,, \quad c = \frac{|B(0,1)|}{|E|}$$

Siis mistä tahansa mitallisesta joukosta $E \subset B(0,1)$, $|E|>0$, saadaan rakennettua säännöllisesti suppenevat joukot.

Jos valitsemme $E = B(0,1) \setminus B(0,\frac{1}{2})$, niin



$$E_r(x) = B(x,r) \setminus B(x,\tfrac{r}{2})$$

ja $x \notin E_r(x)$ millään r.

3.14. <u>Lause</u>. Oletetaan, että $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ja että x on funktion f Lebesguen piste. Jos $E_1, E_2, \ldots$ suppenee säännöllisesti pisteeseen x, niin

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{|E_i|} \int_{E_i} |f(y)-f(x)|\,dy = 0.$$

<u>Tod</u>: $$\frac{1}{|E_i|} \int_{E_i} |f(y)-f(x)|\,dy$$

$$\le \frac{c}{|B(x,r_i)|} \int_{B(x,r_i)} |f(y)-f(x)|\,dy \longrightarrow 0, \quad i\to\infty.$$

$\square$

<u>Huomaa</u>: Siis Lebesguen lauseessa palloilla ei ole erityistä roolia.

3.15. <u>Lause</u>. Jos $f \in L^1([a,b])$ ja $F : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{[a,x]} f(y)\,dy,$$

niin $F'(x)$ on olemassa ja $F'(x) = f(x)$ m.k. $x \in [a,b]$.

<u>Tod</u>: Määritellään $f(x) = 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$.

$r_i > 0$, $\lim_{i\to\infty} r_i = 0$

$E_i = (x, x+r_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, suppenee säännöllisesti pisteeseen $x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} \frac{F(x+r_i) - F(x)}{r_i}$$

$$= \lim_{i\to\infty} \frac{1}{r_i} \int_{(x,x+r_i)} f(y)\,dy = f(x) \text{ m.k. } x \in \mathbb{R}$$

Lause 3.14

$\Rightarrow \exists\, F'_+(x) = f(x)$ m.k. $x \in \mathbb{R}$

Vastaavasti $\exists\, F'_-(x) = f(x)$ m.k. $x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \exists\, F'(x) = f(x)$ m.k. $x \in \mathbb{R}$. $\square$

<u>Huomaa</u>: Tämä on versio analyysin peruslauseesta, joka on helppo todistaa, kun $f \in C([a,b])$.