3.4. Lemma. $Mf$ on alaspäin puolijatkuva.

Huomautus. Väite seuraa siitä, että kiinteällä $r > 0$ funktio

$$x \longmapsto \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$$

on jatkuva, sillä $Mf$ saadaan näistä pisteittäisenä supremumina. Todistamme väitteen kuitenkin suoraan määritelmistä.

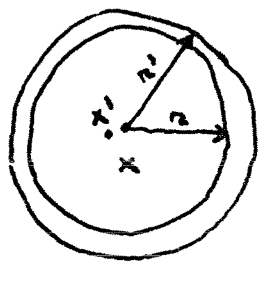
Tod: $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$, $\lambda > 0$

$$x \in E_\lambda \Rightarrow \exists\, r > 0 \text{ s.e. } \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy > \lambda$$

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy = \lim_{\substack{r' \to r \\ r' > r}} \frac{1}{|B(x,r')|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$$

$\Rightarrow \exists\, r' > r$ s.e.

$$\frac{1}{|B(x,r')|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy > \lambda$$




$$|x - x'| < r' - r \Rightarrow B(x,r) \subset B(x',r')$$

$$\left( y \in B(x,r) \Rightarrow |y - x'| \le |y - x| + |x - x'| \right.$$
$$\left. < r + (r' - r) = r' \right)$$

$$\Rightarrow \lambda < \frac{1}{|B(x,r')|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$$

$$\underset{B(x,r) \subset B(x',r')}{\leq} \frac{1}{|B(x,r')|} \int_{B(x',r')} |f(y)|\,dy$$

$$= \frac{1}{|B(x',r')|} \int_{B(x',r')} |f(y)|\,dy \leq Mf(x'), \quad |x-x'| < r'-r$$

$$\Rightarrow B(x, r'-r) \subset E_\lambda \Rightarrow E_\lambda \text{ avoin.} \qquad \square$$

3.5. **Lemma**. Jos $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, niin $Mf \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ja

$$\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty .$$

**Tod:**

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy \underset{\text{Lause 2.15}}{\leq} \|f\|_\infty \frac{|B(x,r)|}{|B(x,r)|}$$

$$= \|f\|_\infty \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ r > 0$$

$$\Rightarrow Mf(x) \leq \|f\|_\infty \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty . \qquad \square$$

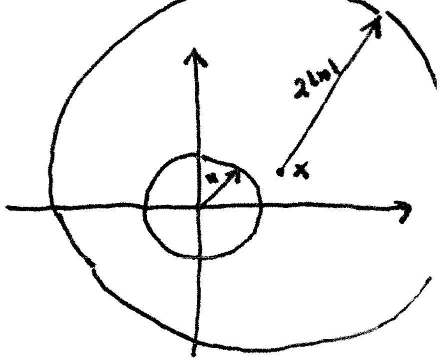
**Huomaa:** $M : L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ on rajoitettu operaattori

**Huomautus.** Kuten havaitsimme

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \not\Rightarrow Mf \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Itse asiassa pätee

$$Mf \in L^1(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow f = 0 \quad !$$




**Syy:** $r > 0$, $|x| \geq r$

$$Mf(x) \geq \frac{1}{|B(x,2|x|)|} \int_{B(x,2|x|)} |f(y)|\,dy$$

$$\geq \frac{1}{|B(0,2|x|)|} \int_{B(0,r)} |f(y)|\,dy$$

$B(0,r) \subset B(x,2|x|)$

$(|y| < r \Rightarrow |y-x| \leq |y| + |x| < r + |x| < 2|x|)$

$$= \frac{c}{|x|^n} \int_{B(0,r)} |f(y)|\,dy$$

Jos $f \not\equiv 0$, niin valitaan $r > 0$ niin suureksi, että

$$\int_{B(0,r)} |f(y)|\,dy > 0$$

$$\Rightarrow Mf(x) \geq \frac{c}{|x|^n} \quad \forall \; x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,r)$$

$$\frac{c}{|x|^n} \notin L^1(\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)) \Rightarrow Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n). \qquad \square$$

<u>Huomautus</u>. $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \not\Rightarrow Mf \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

<u>Syy</u>: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\chi_{(0,\frac{1}{2})}(x)}{x(\log x)^2}$

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \quad \left( \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx = \Big/_{0}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\log x} < \infty \right)$$

$0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$Mf(x) \geq \frac{1}{2x} \int_0^{2x} f(y)\, dy \geq \frac{1}{2x} \int_0^{x} f(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2x} \int_0^{x} \frac{1}{y(\log y)^2}\, dy = \frac{1}{2x} \Big/_{0}^{x} - \frac{1}{\log y}$$

$$= -\frac{1}{2x \log x} \notin L^1((0,\tfrac{1}{2}))$$

$\Rightarrow Mf \notin L^1(\mathbb{R})$. □

3.6. <u>Määritelmä</u>. Oletetaan, että $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ on mitallinen. Sanotaan, että $f$ kuuluu heikkoon $L^1(\mathbb{R}^n)$, jos on olemassa sellainen vakio $c$, $0 \leq c < \infty$, että

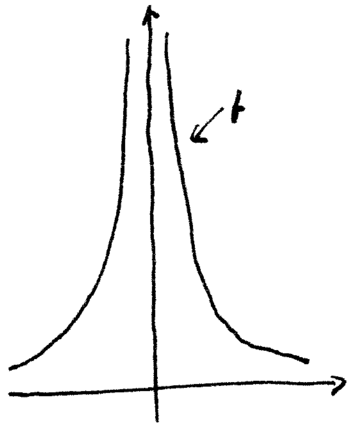
$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda}$$

kaikilla $\lambda > 0$.

Huomautus. (1) $L^1(\mathbb{R}^n) \subset$ heikko $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Syy: $|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|$

$$\underset{\uparrow \text{ Chebyshev}}{\leq} \frac{1}{\lambda} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}} |f(y)|\,dy \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1 \quad \forall\, \lambda > 0$$




(2) heikko $L^1(\mathbb{R}^n) \not\subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Syy: $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, $f(x) = |x|^{-n}$

$f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}| = |B(0, \lambda^{-\frac{1}{n}})| = \Omega_n (\lambda^{-\frac{1}{n}})^n$$
$$= \Omega_n \lambda^{-1} \quad \forall\, \lambda > 0.$$

$\Rightarrow f \in$ heikko $L^1(\mathbb{R}^n)$

3.7. Lause. (Hardy-Littlewood I) Jos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, niin

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{5^n}{\lambda} \|f\|_1$$

kaikilla $\lambda > 0$.

Huomaa: Maksimaalifunktio kuvaa $L^1(\mathbb{R}^n)$:n heikkoon $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Todistus perustuu seuraavaan Vitalin peittelauseeseen.

3.8. <u>Vitalin peitelause</u>.

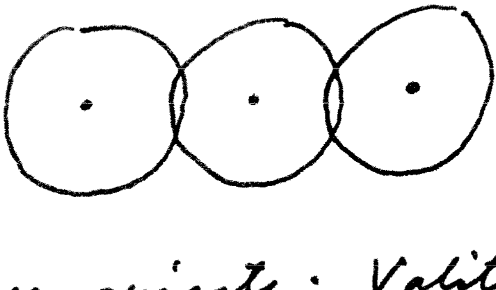
Oletetaan, että $F$ on kokoelma avoimia palloja $B$ s.e.

$$\operatorname{diam}\Big(\bigcup_{B\in F} B\Big) < \infty .$$

Silloin on olemassa numeroituvan monta pistevieraita palloa $B(x_i, r_i) \in F$, $i = 1, 2, \ldots$, s.e.

$$\bigcup_{B\in F} B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, 5r_i) .$$

<u>Huomautus</u>. Haluaisimme poimia $F$:stä pistevieraat pallot, jotka peittävät alkuperäisten pallojen yhdisteen, joten palloja täytyy hieman laajentaa:



<u>Tod</u>: Ahneen periaate: Valitaan pallot induktiivisesti ottamalla aina "suurin" pallo, jolla on halutut ominaisuudet ja jota ei ole valittu aiemmin.

Oletetaan, että pallot $B(x_1, r_1), \ldots, B(x_{i-1}, r_{i-1}) \in \mathcal{F}$ on valittu. Olkoon

$$d_i = \sup \{ r : B(x,r) \in \mathcal{F} \text{ ja } B(x,r) \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} B(x_j, r_j) = \phi \}.$$

$d_i < \infty$, sillä $\sup_{B(x,r)\in\mathcal{F}} r < \infty$. Jos ei ole palloa $B(x,r) \in \mathcal{F}$ s.e.

$$B(x,r) \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} B(x_j, r_j) = \phi,$$

niin valintaprosessi loppuu ja olemme löytäneet halutut pallot $B(x_1, r_1), \ldots, B(x_{i-1}, r_{i-1})$. Muussa tapauksessa valitsemme pallon $B(x_i, r_i) \in \mathcal{F}$ s.e.

$$r_i > \frac{1}{2} d_i \quad \text{ja} \quad B(x_i, r_i) \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} B(x_j, r_j) = \phi.$$

Näin voimme valita myös ensimmäisen pallon $B(x_1, r_1)$. Valitut pallot ovat pistevieraita. Olkoon $B \in \mathcal{F}$ mielivaltainen pallo. Tällöin $B = B(x,r)$ leikkaa ainakin yhtä valituista palloista $B(x_1, r_1), B(x_2, r_2), \ldots$, sillä muuten

$$B(x,r) \cap B(x_i, r_i) = \phi$$

kaikilla $i$ ja pallella $B(x,r)$ voidaan testata $d_i$:n määritelmän ehtoa ja siten

$$d_i \geq r \quad \text{kaikilla } i = 1, 2, \ldots$$

Tästä seuraa, että

$$r_i > \frac{1}{2} d_i \geq \frac{1}{2} r > 0 \quad \text{kaikilla } i = 1, 2, \ldots,$$

joten

$$\left| \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i) \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pallot pistevieraita}}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} |B(x_i, r_i)| = \infty .$$

Tämä on mahdotonta, sillä $\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i)$ on rajoitettu.

Koska $B(x,r)$ leikkaa jotain palloa $B(x_i, r_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, niin on olemassa pienin indeksi $i$ s.e.

$$B(x,r) \cap B(x_i, r_i) \neq \emptyset .$$

Nyt

$$B(x,r) \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} B(x_j, r_j) = \emptyset$$

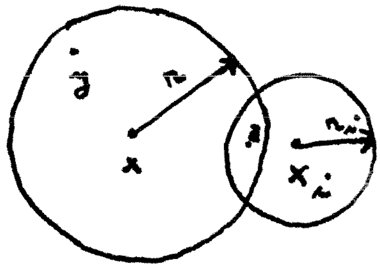
ja pallojen valinnan nojalla

$$r \leq d_i < 2 r_i .$$

Koska $B(x,r) \cap B(x_i, r_i) \neq \emptyset$ ja $r \le 2r_i$, niin

$$B(x,r) \subset B(x_i, 5r_i). \qquad \square$$

$\left( \begin{array}{l} z \in B(x,r) \cap B(x_i, r_i) \\ y \in B(x,r) \end{array} \Rightarrow |y - x_i| \le |y-z| + |z - x_i| \le 2r + r_i \le 5r_i \right)$




<u>Lauseen 3.7. tod.</u>:

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}, \quad \lambda > 0$$

$x \in E_\lambda \Rightarrow \exists\ r > 0$ s.e.

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy > \lambda \qquad (*)$$

Haluaisimme käyttää Vitalin peitelausetta, mutta $\bigcup_{x \in E_\lambda} B(x,r)$ ei välttämättä ole rajoitettu. Siirrymme tutkimaan joukkoa $E_\lambda \cap B(0,k)$, $k = 1, 2, \dots$

Olkoon $F$ kokoelma palloja s.e. $(*)$ pätee ja $x \in E_\lambda \cap B(0,k)$. Jos $B(x,r) \in F$, niin

$$\Omega_n r^n = |B(x,r)| < \frac{1}{\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$$

$$\le \frac{1}{\lambda} \|f\|_1,$$

joten

$$\operatorname{diam} \bigcup_{x \in E_\lambda \cap B(0,k)} B(x,r) < \infty.$$

Vitalin peittolauseen nojalla on olemassa pistevieraat pallot $B(x_i, r_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ s.e.

$$E_\lambda \cap B(0,k) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, 5r_i).$$

Nyt

$$|E_\lambda \cap B(0,k)| \leq \Big|\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, 5r_i)\Big|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} |B(x_i, 5r_i)| = 5^n \sum_{i=1}^{\infty} |B(x_i, r_i)|$$

$$\leq \frac{5^n}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B(x_i, r_i)} |f(y)|\, dy$$

$$= \frac{5^n}{\lambda} \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i)} |f(y)|\, dy \leq \frac{5^n}{\lambda} \|f\|_1,$$

pallot pistevieraita

joten

$$|E_\lambda| = \lim_{k\to\infty} |E_\lambda \cap B(0,k)| \leq \frac{5^n}{\lambda} \|f\|_1. \qquad \square$$

<u>Huomautus</u>. $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow Mf < \infty$ m.k.

<u>Syy</u>: $|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) = \infty\}|$

$$\leq |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{5^n}{\lambda}\|f\|_1 \to 0, \quad \lambda \to \infty.$$

3.9. <u>Lause</u>. (Hardy-Littlewood II) Jos $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \le \infty$, niin $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ja on olemassa $c = c(n,p)$ s.e.

$$\| Mf \|_p \le c \| f \|_p .$$

<u>VAROITUS</u>: Lause ei päde kun $p = 1$. Silloin saadaan vain heikon tyyppiä estimaatti.

Lauseen todistus perustuu seuraavaan hyödylliseen lemmaan.

3.10. <u>Lemma</u>. Oletetaan, että $\mu$ on mitta, $E \subset \mathbb{R}^n$ on $\mu$-mitallinen joukko ja $f : E \to [-\infty, \infty]$ on $\mu$-mitallinen funktio. Sillöin jokaiselle $0 < p < \infty$ pätee

$$\int_E |f|^p \, d\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}) \, d\lambda .$$

<u>Tod</u>: Todistuksen idea on seuraava:

$$\int_E |f|^p \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x) \, p \int_0^{|f(x)|} \lambda^{p-1} \, d\lambda \, d\mu(x)$$

$$= p \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \chi_E(x)\, \chi_{[0,|f(x)|)}(\lambda)\, \lambda^{p-1}\, d\lambda\, d\mu(x)$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} p \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \dots \, d\mu(x)\, d\lambda$$

$$= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x)\, \chi_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}}(x)\, d\mu(x)\, d\lambda$$

$$= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \left|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}\right| d\lambda .$$

Tämä argumentti nojaa Fubinin lauseeseen, mutta tulos on mahdollista todistaa suoraan yksinkertaisten funktioiden avulla. □

Lauseen 3.9 tod:

$f = f_1 + f_2$,

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| > \frac{\lambda}{2}, \\ 0, & |f(x)| \le \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$