$$\Rightarrow |f_i(x) - f(x)| \le \frac{1}{k} \quad \forall\, x \in A \setminus N, \quad i \ge i_k$$

$$\Rightarrow \|f_i - f\|_\infty \le \frac{1}{k} \quad \text{kun } i \ge i_k$$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty \le \|f_i\|_\infty + \|f_i - f\|_\infty$$

$$\le \|f_i\|_\infty + \frac{1}{k} \quad \text{kun } i \ge i_k$$

$\Rightarrow f \in L^\infty(A)$ ja $f_i \to f$ $L^\infty(A)$:ssa. $\square$

__Huomaa:__ $\|f_i - f\|_\infty \to 0$, $i \to \infty$

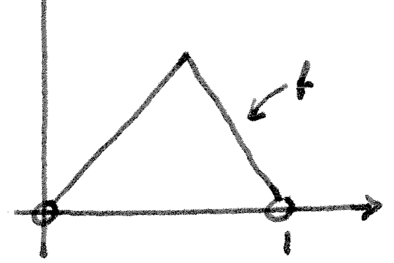
$\Rightarrow f_i \to f$ tasaisesti joukossa $A \setminus N$, missä $|N| = 0$.

2.18. __Määritelmä__. Funktion $f : A \to [-\infty, \infty]$ kantaja on

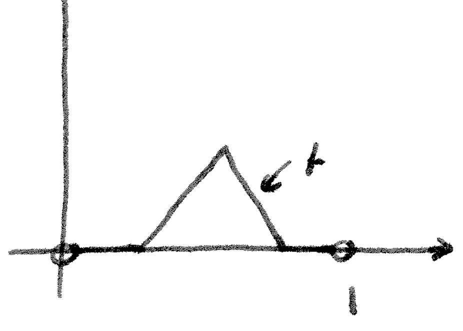
$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in A : f(x) \neq 0\}}.$$

Funktio on kompaktikantajainen, jos supp f on kompakti ja supp $f \subset A$

VAROITUS: supp f ei aina ole A:n osajoukko



$A = (0,1)$, supp $A = [0,1]$



supp $f \subset (0,1)$

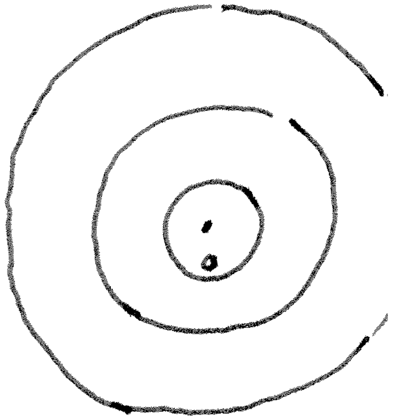
Merkintöjä:

$$C(A) = \{ f : A \to \mathbb{R} \; : \; f \text{ jatkuva } A\text{:ssa} \}$$

$$C_0(A) = \{ f \in C(A) \; : \; \operatorname{supp} f \subset A \text{ on kompakti} \}$$

Seuraavaksi todistamme, että $C_0(\mathbb{R}^n)$ on tiheä avaruudessa $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$. Tämä tehdään useassa vaiheessa.

Oletetaan, että $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$.



$\boxed{\text{Vaihe 1}}$: $f_i = f \chi_{B(0,i)}$, $i = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{i \to \infty} f_i(x) = f(x) \quad \forall \, x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \lim_{i \to \infty} |f_i(x) - f(x)| = 0 \quad \forall \, x \in \mathbb{R}^n$$

$$|f_i(x) - f(x)|^p \le \left(|f_i(x)| + |f(x)| \right)^p \le 2^p |f(x)|^p$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f_i - f|^p \, dx \to 0 \text{ kun } i \to \infty$$

LDK, $|f|^p \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow L^p_0(\mathbb{R}^n)$ on tiheä $L^p(\mathbb{R}^n)$:ssä, joten voimme olettaa, että $f = 0$ jonkin rajoitetun joukon ulkopuolella

$\boxed{\text{Vaihe 2}}$: Koska $f = f_+ - f_-$, niin jos voimme approksimoida funktiota f_+, niin sama pätee funktiolle f_-. Siis voimme olettaa, että $f \geq 0$ ja että $f = 0$ jonkin rajoitetun joukon ulkopuolella.

$\boxed{\text{Vaihe 3}}$: Koska $f \geq 0$ on mitallinen, niin on olemassa yksinkertaiset funktiot f_i s.e.

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f$$

ja

$$\lim_{i \to \infty} f_i(x) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

$$\Rightarrow \lim_{i \to \infty} |f_i(x) - f(x)| = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

$$|f_i(x) - f(x)|^p \leq \left(|f_i(x)| + |f(x)|\right)^p \leq 2^p |f(x)|^p$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f_i - f|^p \, dx \to 0 \quad \text{kun } i \to \infty$$

LDK, $|f|^p \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Voimme siis olettaa, että f on yksinkertainen, $f \geq 0$ ja $f = 0$ jonkin rajoitetun joukon ulkopuolella.

$\boxed{\text{Vaihe 4}}$: $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$, A_i:t pistevieraita ja mitallisia, $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$. Voimme siis olettaa, että $f = \chi_A$, missä A on rajoitettu mitallinen joukko.

$\boxed{\text{Vaihe 5}}$: Approksimaatiolauseen 1.10 nojalla on olemassa avoin $U \supset A$ ja suljettu $F \subset A$ s.e.

$$|U \setminus F|^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

missä $\varepsilon > 0$. F on suljettuna ja rajoitettuna joukkona kompakti.

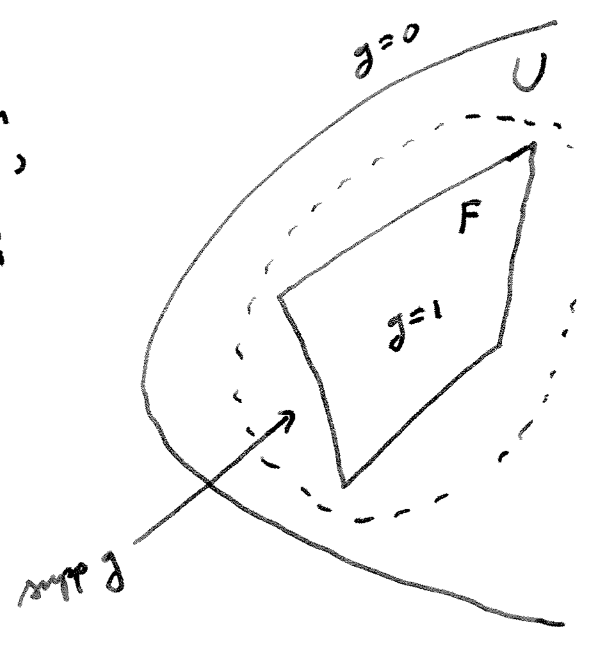
Nyt tarvitsemme seuraavan Urysonin lemman version.

2.19. Lemma. Oletetaan, että $U \subset \mathbb{R}^n$ on avoin ja $F \subset U$ kompakti. Sillloin on olemassa jatkuva funktio $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s.e.

(i) $0 \leq g(x) \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $g(x) = 1$ kaikilla $x \in \cancel{\mathbb{R}^n}$ F ja

(iii) $g \in C_0(U)$.



Tod: $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$, V avoin, $\overline{V}$ kompakti

($\{B(x,r) : x \in F\}$ on F:n avoin peite, $r \leq \frac{1}{2} \operatorname{dist}(F, \mathbb{R}^m \setminus U)$,

F kompakti $\Rightarrow F \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, r)$ ← tämä kelpaa V:ksi)

$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^m \setminus V)}{\operatorname{dist}(x, F) + \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^m \setminus V)},$$

missä

$$\operatorname{dist}(x, E) = \inf\{|x-y| : y \in E\}$$ (etäisyys joukosta E)

$\boxed{(i)}$: OK

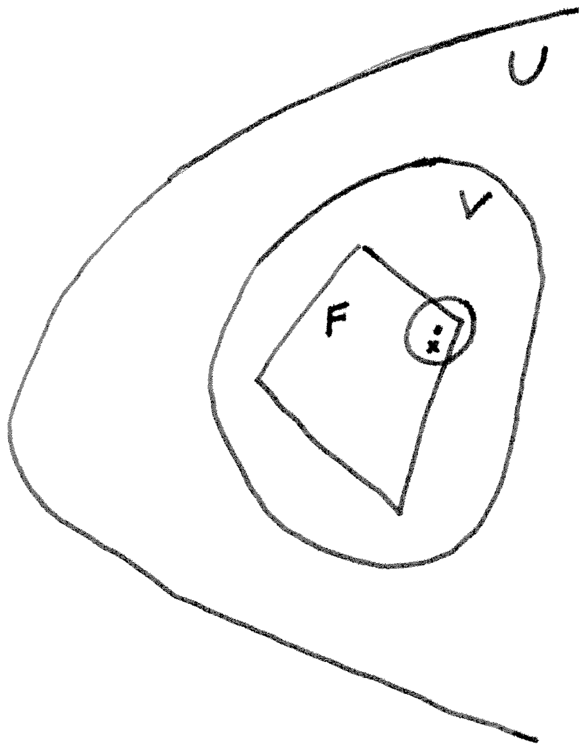
$\boxed{(ii)}$: $x \in F \Rightarrow \operatorname{dist}(x, F) = 0$

$F \subset V \Rightarrow x \in V$, V avoin

$\Rightarrow \exists\, r > 0$ s.e. $B(x,r) \subset V$

$\Rightarrow \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^m \setminus V) > 0$

$\Rightarrow g(x) = 1$



$\operatorname{supp} g = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \neq 0\}} \subset \overline{V}$, joten se on suljettuna ja rajoitettuna joukkona kompakti.

<u>Väite</u>: $x \mapsto \operatorname{dist}(x, E)$ on jatkuva $(E \neq \emptyset)$

<u>Syy</u>: $x, x' \in \mathbb{R}^n$, $y \in E$

$\Rightarrow \operatorname{dist}(x, E) \leq |x-y| \leq |x-x'| + |x'-y|$

$\Rightarrow \operatorname{dist}(x, E) - |x-x'| \leq |x'-y| \quad \forall y \in E$

$\Rightarrow \operatorname{dist}(x, E) - |x-x'| \leq \operatorname{dist}(x', E)$

$\Rightarrow \operatorname{dist}(x, E) - \operatorname{dist}(x', E) \leq |x-x'|$

Vaihtamalla x:n ja x':n roolit

$$\operatorname{dist}(x', E) - \operatorname{dist}(x, E) \leq |x-x'|$$

$\Rightarrow |\operatorname{dist}(x, E) - \operatorname{dist}(x', E)| \leq |x-x'|$

Siis $\operatorname{dist}(x, E)$ on jopa Lipschitz-jatkuva vakiolla 1. $\square$

Lemma 2.19 $\Rightarrow \exists\, g \in C_0(U)$ s.e. $0 \le g \le 1$ ja

$$g(x) = 1 \quad \forall\, x \in F$$

$$\Rightarrow \| f - g \|_p = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} | \chi_A - g |^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le | U \setminus F |^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

$x \in F \Rightarrow \chi_A(x) - g(x) = 1 - 1 = 0$

$x \in \mathbb{R}^n \setminus U \Rightarrow \chi_A(x) - g(x) = 0 - 0 = 0$

$|\chi_A - g| \le 1$

Olemme todistaneet seuraavan tuloksen:

2.20. <u>Lause</u>. $C_0(\mathbb{R}^n)$ on tiheä avaruudessa $L^p(\mathbb{R}^n)$ kun $1 \le p < \infty$.

VAROITUS: $C_0(\mathbb{R}^n)$ ei ole tiheä $L^\infty(\mathbb{R}^n)$:ssä

<u>Syy</u>: $C_0(\mathbb{R}^n) \subset C(\mathbb{R}^n)$ täydellinen normilla $\| \cdot \|_\infty$

$\Rightarrow$ Jos $\overline{C_0(\mathbb{R}^n)} = L^\infty(\mathbb{R}^n)$, niin kaikki $L^\infty(\mathbb{R}^n)$-funktiot olisivat jatkuvia

(Toisaalta funktiota $f(x) = 1 \;\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ ei voida approksimoida kompaktikantajisilla funktioilla L^∞-normin suhteen.)

2.21. <u>Lause.</u> Jos $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, niin

$$\lim_{y \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x)|^p \, dx = 0.$$

<u>Tod:</u> $\varepsilon > 0$, $y \in \mathbb{R}^n$

Lause 2.20 $\Rightarrow \exists\, g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ s.e.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Lebesguen mitta on siirtoinvariantti $\Rightarrow$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - g(x+y)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$g \in C_0(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists\, r > 0$ s.e. $g(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,r)$

$\Rightarrow g$ on tasaisesti jatkuva $\mathbb{R}^n$:ssä

$\Rightarrow \exists\, 0 < \delta \le 1$ s.e.

$$|g(x+y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3\, |B(0,r+1)|^{\frac{1}{p}}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, |y| < \delta$$

$$g(x+y) - g(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,r+1)$$

$$\Rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x+y) - g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{B(0,r+1)} |g(x+y) - g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3\,|B(0,r+1)|^{\frac{1}{p}}} \, |B(0,r+1)|^{\frac{1}{p}} = \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\underset{\text{Minkowski}}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - g(x+y)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x+y) - g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x) - f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \qquad \square$$

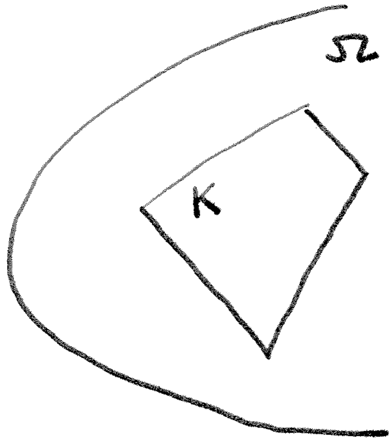
VAROITUS: Väite ei päde kun $p = \infty$.

<u>Syy</u>: $f = \chi_{[0,\infty)}$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x+y) - f(x)| = 1 \quad \forall\, y \neq 0$$

2.22. Määritelmä. Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin joukko ja $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ mitallinen funktio. Silloin $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, jos

$$\int_K |f|^p \, dx < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$



tai

$$\operatorname*{ess\,sup}_K |f| < \infty, \quad p = \infty,$$

kaikille kompakteille joukoille $K \subset \Omega$.

Huomaa: $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$

$$L^\infty_{loc}(\Omega) \subset L^q_{loc}(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega), \quad 1 \le p \le q \le \infty$$

Esimerkki. (1) $\Omega = (0, \infty)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow f \notin L^1(\Omega)$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

(2) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$

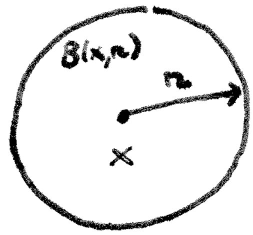
$\Rightarrow f \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ millään $1 \le p < \infty$, mutta

$f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ kaikilla $1 \le p \le \infty$

3. Hardy-Littlewoodin maksimaalifunktio

3.1. Määritelmä. Funktion $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ Hardy-Littlewoodin maksimaalifunktio $Mf : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ on

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy,$$



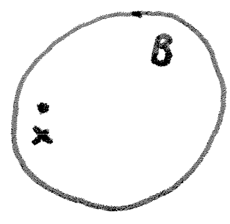
missä $B(x,r) = \{ y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < r \}$.

Huomautus. (1) Mf on määritelty jokaisessa pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$ ja jos $f = g$ m.k., niin $Mf(x) = Mg(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

(2) Helposti käy niin, että $Mf(x) = \infty$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.
$(f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x \Rightarrow Mf(x) = \infty\ \forall x \in \mathbb{R}.)$

(3) Kirjallisuudessa on useita eri määritelmiä, jotka usein johtavat ekvivalenttiin käsitteeseen. Jos

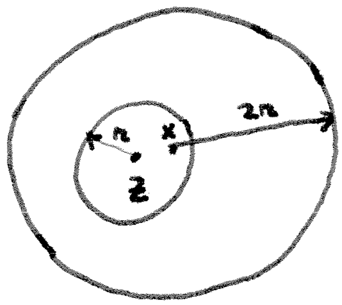
$$\tilde{M} f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|\,dy,$$



missä supremum otetaan yli kaikkien avointen pallojen B, jotka sisältävät pisteen x, niin

$$Mf(x) \le \tilde{M} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Toisaalta, jos $B = B(z,r) \ni x$, niin $B(z,r) \subset B(x,2r)$ ja



$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|\, dy$$

$$\leq \frac{|B(x,2r)|}{|B(z,r)|} \frac{1}{|B(x,2r)|} \int_{B(x,2r)} |f(y)|\, dy$$

$$= 2^n \frac{1}{|B(x,2r)|} \int_{B(x,2r)} |f(y)|\, dy \leq 2^n Mf(x).$$

Tästä seuraa, että $\tilde{M} f(x) \leq 2^n Mf(x)$ ja siten

$$Mf(x) \leq \tilde{M} f(x) \leq 2^n Mf(x) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n.$$

3.2. <u>Lemma</u>. Oletetaan, että $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

(i) $Mf(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. (positiivisuus)

(ii) $M(f+g)(x) \leq Mf(x) + Mg(x)$. (sublineaarisuus)

(iii) $M(\alpha f)(x) = |\alpha|\, Mf(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. (homogeenisuus)

(iv) $M(\tau_y f)(x) = (\tau_y Mf)(x)$, $y \in \mathbb{R}^n$, missä $\tau_y f(x) = f(x+y)$. (siirtoinvarianssi)

<u>Tod</u>: HT. $\square$

3.3. Lemma. Jos $f \in C(\mathbb{R}^n)$, niin

$$|f(x)| \le Mf(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

Tod: $f \in C(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.e. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$
kun $|x - y| < \delta$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy - |f(x)| \right|$$

$$= \left| \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} (|f(y)| - |f(x)|)\,dy \right|$$

$$\le \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \big||f(y)| - |f(x)|\big|\,dy$$

$$\le \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\,dy \le \varepsilon, \text{ kun } r \le \delta$$

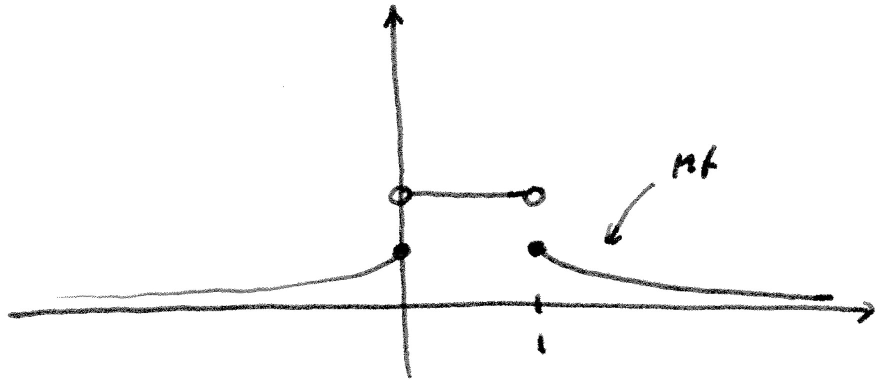
kolmioepäyhtälö

$$\Rightarrow |f(x)| = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$$

$$\le Mf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Esimerkki. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = \chi_{(0,1)}$

$$\Rightarrow Mf(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-x)}, & x \le 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ \dfrac{1}{2x}, & x \ge 1. \end{cases}$$



Huomaa: $f \in L^1(\mathbb{R}) \not\Rightarrow Mf \in L^1(\mathbb{R})$

Määritelmä: $f: \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ on alaspäin puolijatkuva, jos

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \lambda\}$$

on avoin jokaiselle $\lambda \in \mathbb{R}$.

f alaspäin puolijatkuva

$\Rightarrow f$ Borel-mitallinen

$\Rightarrow f$ Lebesgue-mitallinen

Esimerkki. $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin $\Rightarrow \chi_U$ on alaspäin puolijatkuva