$$F \in L^p(A) \Rightarrow F(x) < \infty \quad \text{m.k. } x \in A$$

$$\Rightarrow \exists\, N \subset A \text{ s.e. } |N| = 0 \text{ ja}$$

$$F(x) < \infty \quad \forall\, x \in A \setminus N$$

$$\Rightarrow |f_{i_1}(x)| + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |f_{i_{k+1}}(x) - f_{i_k}(x)|}_{\text{suppenee kaikilla } x \in A \setminus N}$$

$$\Rightarrow f_{i_1}(x) + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (f_{i_{k+1}}(x) - f_{i_k}(x))}_{\text{suppenee kaikilla } x \in A \setminus N}$$

(itseisesti suppenemisesta seuraa tavallinen)

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} \left(f_{i_1}(x) + \sum_{k=1}^{m-1} \left(f_{i_{k+1}}(x) - f_{i_k}(x) \right) \right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} f_{i_k}(x) \text{ on olemassa kaikilla } x \in A \setminus N$$

Määritellään

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{k\to\infty} f_{i_k}(x), & x \in A \setminus N, \\ 0, & x \in N \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ mitallinen

$$f(x) = f_{i_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{i_{k+1}}(x) - f_{i_k}(x) \right)$$

$$= f_{i_1}(x) + \sum_{k=1}^{m-1} \left(f_{i_{k+1}}(x) - f_{i_k}(x) \right)$$

$$+ \sum_{k=m}^{\infty} \left(f_{i_{k+1}}(x) - f_{i_k}(x) \right)$$

$$= f_{i_m}(x) + \sum_{k=m}^{\infty} \left(f_{i_{k+1}}(x) - f_{i_k}(x) \right) \quad \forall x \in A \setminus N$$

$$\Rightarrow \left| f(x) - f_{i_m}(x) \right| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \left| f_{i_{k+1}}(x) - f_{i_k}(x) \right|$$

$$= \lim_{l \to \infty} \sum_{k=m}^{l} \left| f_{i_{k+1}}(x) - f_{i_k}(x) \right| \quad \forall x \in A \setminus N$$

$$\Rightarrow \| f - f_{i_m} \|_p$$

$$\leq \left(\int_A \left| \lim_{l \to \infty} \sum_{k=m}^{l} | f_{i_{k+1}} - f_{i_k} | \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\underset{\text{LMK}}{=} \lim_{l \to \infty} \left(\int_A \left(\sum_{k=m}^{l} | f_{i_{k+1}} - f_{i_k} | \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\underset{\text{Minkowski}}{\leq} \lim_{l \to \infty} \sum_{k=m}^{l} \| f_{i_{k+1}} - f_{i_k} \|_p \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2^{1-m}$$

$$\| f \|_p \le \| f - f_{i_m} \|_p + \| f_{i_m} \|_p < \infty$$

$$\Rightarrow f \in L^p(A)$$

$$\lim_{m\to\infty} \| f - f_{i_m} \|_p \le \lim_{m\to\infty} 2^{1-m} = 0$$

Tämä osoittaa, että alkuperäisellä jonolla (f_i) on osajono (f_{i_m}) s.e. $f_{i_m} \to f$ $L^p(A)$:ssa.

Todistetaan vielä, että alkuperäinen jono (f_i) suppenee kohti funktiota f $L^p(A)$:ssa.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan m s.e. $2^{1-m} < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \| f - f_i \|_p \le \| f - f_{i_m} \|_p + \| f_{i_m} - f_i \|_p$$

$$< 2^{1-m} + 2^{-m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{kun } i \ge i_m.$$

$\square$

<u>VAROITUS</u>: Siitä että osajono suppenee ei yleensä seuraa, että alkuperäinen jono suppenee. Käytimme tietoa, että kyseessä on Cauchyn jono.

2.10. <u>Seuraus</u>. Jos $f_i \to f$ $L^p(A)$:ssa, niin on olemassa sellainen osajono (f_{i_k}), että

$$\lim_{k\to\infty} f_{i_k}(x) = f(x) \quad \text{m.k. } x \in A.$$

<u>Tod</u>: Riesz-Fischerin lauseen todistuksesta seuraa, että on olemassa osajono (f_{i_k}) ja funktio $g \in L^p(A)$ s.e.

$$\lim_{k\to\infty} f_{i_k}(x) = g(x) \quad \text{m.k. } x \in A$$

ja $f_{i_k} \to g$ $L^p(A)$:ssa.

$f_i \to f$ $L^p(A)$:ssa $\Rightarrow$ $f_{i_k} \to f$ $L^p(A)$:ssa

$\Rightarrow$ $f = g$ m.k. A:ssa

raja-arvon yksikäsitteisyys $\square$

2.11. <u>Huomautus</u>. Jos $f_i \to f$ $L^p(A)$:ssa, niin

$$\lim_{i\to\infty} \|f_i\|_p = \|f\|_p.$$

<u>Syy</u>: $\|f_i\|_p = \|f_i - f + f\|_p \underset{\text{Minkowski}}{\leq} \|f_i - f\|_p + \|f\|_p$

$\Rightarrow \|f_i\|_p - \|f\|_p \leq \|f_i - f\|_p$

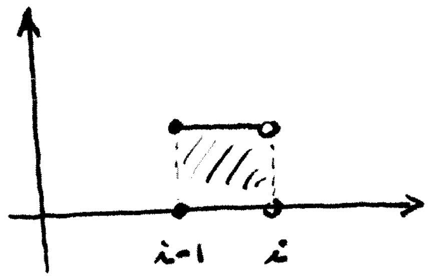
Samalla tavalla $\|f\|_p - \|f_i\|_p \leq \|f_i - f\|_p$

$\Rightarrow \big| \|f_i\|_p - \|f\|_p \big| \leq \|f_i - f\|_p \to 0$

$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} \|f_i\|_p = \|f\|_p .$

<u>Esimerkki</u>: $f_i = \chi_{[i-1,i)}$, $i = 1,2,\dots$

$f = 0$



$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} f_i(x) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$\|f_i - f\|_p = 1$, $i = 1,2,\dots$

$\Rightarrow f_i \not\to f \quad L^p(\mathbb{R})$:ssä, kun $1 \leq p < \infty$

<u>Huomaa</u>: $\boxed{p=1}$: $f_i \to f \quad L^1(A)$:ssa

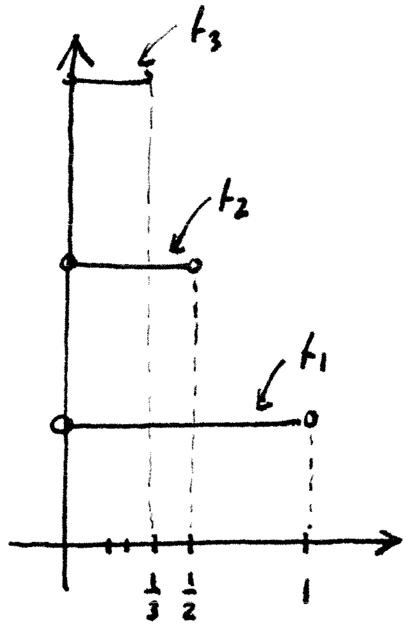
$\Rightarrow \|f_i - f\|_1 \to 0$

$\Rightarrow \left| \int_A (f_i - f)\,dx \right| \leq \int_A |f_i - f|\,dx = \|f_i - f\|_1 \to 0$

$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} \int_A f_i\,dx = \int_A f\,dx$

Esimerkki:

(1) $f_i \to f$ m.k. $\not\Rightarrow$ $f_i \to f$ L^p:ssä



$$f_i = i^2 \chi_{(0,\frac{1}{i})}, \quad i = 1,2,\dots$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f_i|^p \, dx = i^{2p} \int_{\mathbb{R}} \chi^p_{(0,\frac{1}{i})} \, dx$$

$$= i^{2p} \cdot \frac{1}{i} = i^{2p-1} < \infty$$

$$\Rightarrow \quad f_i \in L^p(\mathbb{R}), \quad 1 \le p < \infty$$

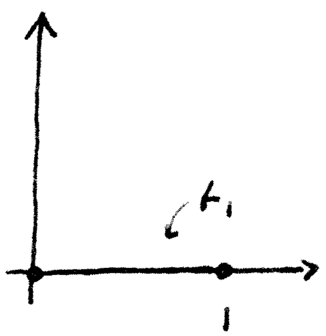
$f_i(x) \to 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, mutta

$$\|f_i\|_p = i^{2-\frac{1}{p}} \ge i \to \infty \text{ kun } i \to \infty.$$

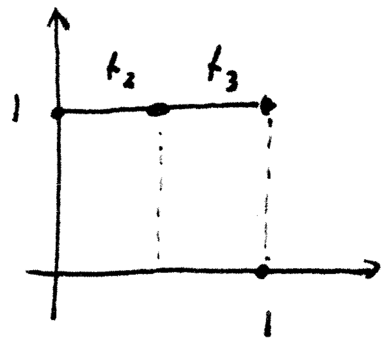
(2) $f_i \to f$ L^p:ssä $\not\Rightarrow$ $f_i \to f$ m.k.

$$f_{2^k+j} = k \chi_{\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]}, \quad k = 0,1,2,\dots, \quad j = 0,1,2,\dots,2^k-1$$

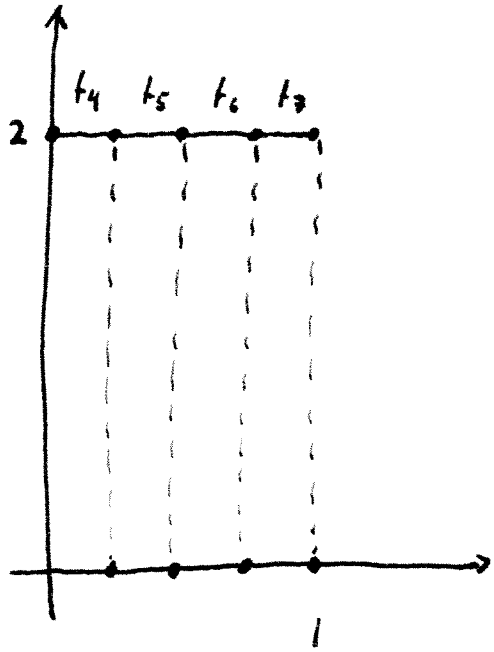
$\boxed{k=0}$:



$\boxed{k=1}$:



$\boxed{k=2}$:



"liukuva funktiojono"

$$\| f_{2^k+j} \|_p = k\, 2^{-\frac{k}{p}} \to 0 \,, \quad 1 \le p < \infty, \text{ kun } k \to \infty$$

$$\Rightarrow \quad f_i \to 0 \quad L^p(\mathbb{R})\text{:ssä, kun } i \to \infty$$

$$\left.\begin{aligned} \limsup_{i\to\infty} f_i(x) &= \infty \\ \liminf_{i\to\infty} f_i(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{i\to\infty} f_i(x) \text{ millään } x \in [0,1]$$

2.12. <u>Määritelmä</u>. Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen joukko ja $f : A \to [-\infty, \infty]$ on mitallinen funktio. Silloin $f \in L^\infty(A)$, jos on olemassa sellainen M, $0 \le M < \infty$, että

$$|f(x)| \le M \quad \text{m.k. } x \in A .$$

Jos $f \in L^\infty(A)$, niin

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \inf \{ M : |f(x)| \le M \text{ m.k. } x \in A \} \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in A} |f(x)| . \end{aligned}$$

INTUITIO: $\|f\|_\infty$ on supremum lukuun ottamatta f:n käyttäytymistä nollamittaisissa joukoissa.

Esimerkki. (1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty = 0, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = 1$$

(2) $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f \notin L^\infty((0,\infty))$

Huomautus: $f \in L^\infty(A)$, $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow |\{x \in A : |f(x)| \geq \|f\|_\infty + \varepsilon\}| = 0 \text{ ja}$$

$$|\{x \in A : |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}| > 0.$$

Huomautus: $\|f\|_\infty \leq \sup_{x\in A} |f(x)|$, $f \in C(A) \Rightarrow \|f\|_\infty = \sup_{x\in A}|f(x)|$

2.13. Lemma. Jos $f \in L^\infty(A)$, niin

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ m.k. } x \in A.$$

Tod: $\forall i = 1,2,\ldots \ \exists M_i \geq 0$ s.e. $M_i < \|f\|_\infty + \frac{1}{i}$ ja

$$|f(x)| \leq M_i \text{ m.k. } x \in A$$

$$\Rightarrow \exists N_i \subset A, \ |N_i| = 0 \text{ s.e.}$$

$$|f(x)| \leq M_i \quad \forall x \in A \setminus N_i$$

$$N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \Rightarrow |N| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |N_i| = 0 \text{ ja}$$

$$|f(x)| \leq M_i < \|f\|_\infty + \frac{1}{i} \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, \quad x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \setminus N_i) = A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i = A \setminus N$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq \|f\|_\infty \quad \forall\, x \in A \setminus N$$

$\square$

Huomautus. Lemmasta 2.13 seuraa, että infimum määritelmässä 2.12 on minimi.

2.14. Lemma. (Minkowskin epäyhtälö kun $p = \infty$)

$$f, g \in L^\infty(A) \Rightarrow \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

Tod: Lemma 2.13 $\Rightarrow$ $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ m.k. $x \in A$ ja
$|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ m.k. $x \in A$

$$\Rightarrow |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$
$$\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \text{m.k. } x \in A$$

$$\Rightarrow \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty . \quad \square$$

Huomautus. $\|\cdot\|_\infty$ on normi samalla tulkinnalla kuin $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p < \infty$:

$$\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow |f(x)| \leq \|f\|_\infty = 0 \text{ m.k. } x \in A$$
$$\Rightarrow f(x) = 0 \text{ m.k. } x \in A.$$

2.15. __Lause.__ (Hölderin epäyhtälö kun $p = \infty$, $p' = 1$)
Jos $f \in L^1(A)$ ja $g \in L^\infty(A)$, niin $fg \in L^1(A)$ ja

$$\int_A |fg|\,dx \le \|g\|_\infty \|f\|_1 .$$

__Tod:__ Lemma 2.13 $\Rightarrow |f(x)g(x)| \le \|g\|_\infty |f(x)|$ m.k. $x \in A$

$$\Rightarrow \int_A |f(x)g(x)|\,dx \le \|g\|_\infty \|f\|_1 . \quad \square$$

__Huomaa:__ Lauseesta on olemassa myös L^p-versio:

$$\int_A |fg|^p\,dx \le \|g\|_\infty^p \int_A |f|^p\,dx .$$

2.16. __Lause.__ Jos $f \in L^p(A)$ jollain $1 \le p < \infty$, niin

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty .$$

__Tod:__ $E_\lambda = \{x \in A : |f(x)| > \lambda\}$

$0 \le \lambda < \|f\|_\infty \Rightarrow |E_\lambda| > 0$

$$|E_\lambda| \le \int_A \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^p dx = \frac{1}{\lambda^p} \int_A |f|^p\,dx$$

Chebyshev

$$\Rightarrow \|f\|_p \geq \lambda |E_\lambda|^{\frac{1}{p}}$$

$$0 < |E_\lambda| < \infty \Rightarrow |E_\lambda|^{\frac{1}{p}} \to 1 \quad \text{kun } p \to \infty$$

$$\left(|E_\lambda| = \infty \Rightarrow |E_\lambda|^{\frac{1}{p}} = \infty \right)$$

$$\Rightarrow \liminf_{p \to \infty} \|f\|_p \geq \lambda \quad \forall\ 0 \leq \lambda < \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \liminf_{p \to \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$$

Toisaalta

$$\|f\|_p = \Big(\int_A |f|^p \,dx \Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_A |f|^q |f|^{p-q} \,dx \Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\underset{p>q}{\leq} \|f\|_\infty^{1-\frac{q}{p}} \underbrace{\|f\|_q^{\frac{q}{p}}}_{<\infty}$$

$$\Rightarrow \limsup_{p \to \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty . \qquad \square$$

<u>Huomautus</u>. Oletus $f \in L^p(A)$ jollain $1 \leq p < \infty$ voidaan korvata oletuksella $|A| < \infty$.

2.17. Lause. $L^\infty(A)$ on Banachin avaruus.

Tod: (f_i) Cauchyn jono $L^\infty(A)$:ssa

Lemma 2.13 $\Rightarrow$ $|f_i(x) - f_j(x)| \le \|f_i - f_j\|_\infty$ m.k. $x \in A$

$\Rightarrow \exists\ N_{i,j} \subset A,\ |N_{i,j}| = 0$ s.e.

$$|f_i(x) - f_j(x)| \le \|f_i - f_j\|_\infty \quad \forall\ x \in A \setminus N_{i,j}$$

(f_i) Cauchy $\Rightarrow$ $\forall\ k = 1, 2, \ldots\ \exists\ i_k$ s.e.

$$\|f_i - f_j\|_\infty < \frac{1}{k} \quad \text{kun } i, j \ge i_k$$

$$\Rightarrow |f_i(x) - f_j(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall\ x \in A \setminus N_{i,j},\quad i, j \ge i_k$$

$$N = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} N_{i,j} \Rightarrow |N| \le \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |N_{i,j}| = 0$$

$$|f_i(x) - f_j(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall\ x \in A \setminus N,\quad i, j \ge i_k$$

$\Rightarrow$ $(f_i(x))$, $x \in A \setminus N$ on Cauchyn jono

$\Rightarrow$ $\exists \lim_{i \to \infty} f_i(x) = f(x) \quad \forall\ x \in A \setminus N$

$\mathbb{R}$ täydellinen

$$f(x) = \begin{cases} \lim f_i(x), & x \in A \setminus N, \\ 0, & x \in N \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f mitallinen

$\Rightarrow |f_i(x) - f(x)| \le \frac{1}{k} \quad \forall\, x \in A \setminus N, \ i \ge i_k$

$\Rightarrow \|f_i - f\|_\infty \le \frac{1}{k}$ kun $i \ge i_k$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty \le \|f_i\|_\infty + \|f_i - f\|_\infty$$

$$\le \|f_i\|_\infty + \frac{1}{k} \text{ kun } i \ge i_k$$

$\Rightarrow f \in L^\infty(A)$ ja $f_i \to f$ $L^\infty(A)$:ssa. □

Huomaa: $\|f_i - f\|_\infty \to 0, \ i \to \infty$

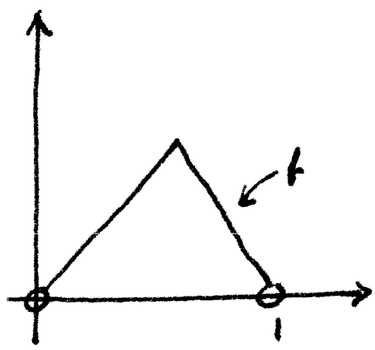
$\Rightarrow f_i \to f$ tasaisesti joukossa $A \setminus N$, missä $|N| = 0$.

2.18. Määritelmä. Funktion $f : A \to [-\infty, \infty]$ kantaja on

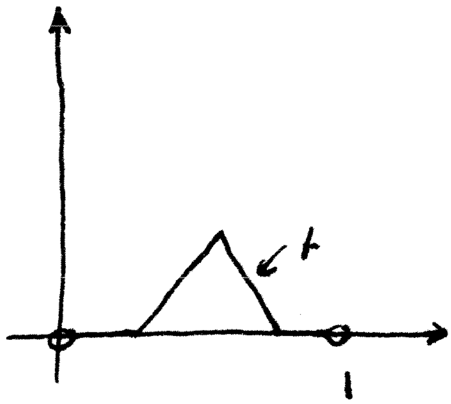
$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in A : f(x) \ne 0\}}.$$

Funktio on kompaktikantajainen, jos supp f on kompakti ja supp $f \subset A$

VAROITUS: supp f ei aina ole A:n osajoukko



$A = (0,1)$, supp $f = [0,1]$



supp $f \subset (0,1)$