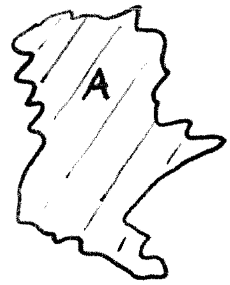
2. L^p-avaruudet

2.1. Integrointi osajoukoilla



$A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko,

$f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ mitallinen funktio

$$\int_A f\,dx = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f \chi_A\,dx}_{\text{kun määritelty}}$$

$f \geq 0 \Rightarrow$ integraali määritelty (voi olla ∞)

$f\chi_A$ integroituva eli $\int_{\mathbb{R}^n} |f\chi_A|\,dx < \infty$

$\Rightarrow$ integraali määritelty (ja $< \infty$)

Funktion $f : A \to [-\infty, \infty]$ sanotaan olevan mitallinen, jos $f^* : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A, \end{cases} \qquad \text{(nollajatko)}$$

on mitallinen. Silloin

$$\int_A f\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^*\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^* \chi_A\,dx = \int_A f^*\,dx.$$

2.2. Määritelmä. Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen joukko ja $f : A \to [-\infty, \infty]$ on mitallinen funktio. Silloin $f \in L^p(A)$, $1 \le p < \infty$, jos

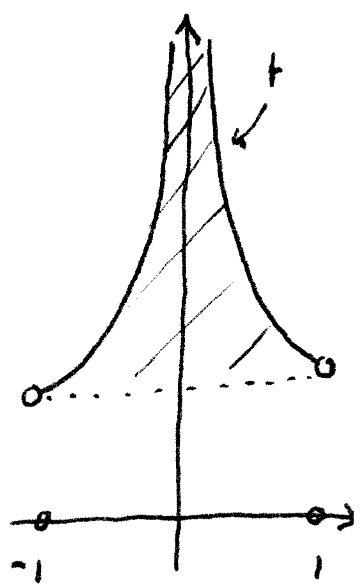
$$\|f\|_p = \left(\int_A |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Huomautus.

$\boxed{p = 1}$: $f \in L^1(A) \iff f$ integroituva A:ssa

$\boxed{1 \le p < \infty}$: $f \in L^p(A) \iff |f|^p$ integroituva A:ssa

Esimerkki.



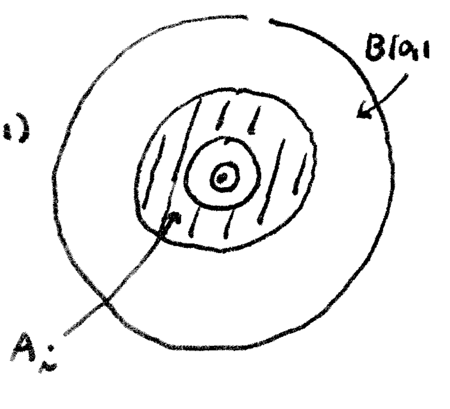
(1) $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, $f(x) = |x|^{-n}$

$\boxed{A = B(0,1)}$: $B(0,1) = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1 \}$

$A_i = B(0, 2^{-i+1}) \setminus B(0, 2^{-i})$, $i = 1, 2, \ldots$

$x \in A_i \Rightarrow |x| \ge 2^{-i}$ ja $|x| \le 2^{-i+1}$

$\Rightarrow |x|^{-np} \le 2^{npi}$ ja $|x|^{-np} \ge 2^{np(i-1)}$



$$\int_{B(0,1)} |x|^{-np}\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} |x|^{-np}\,dx \le \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} 2^{npi}\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{npi} |A_i| \le \sum_{i=1}^{\infty} 2^{npi} |B(0, 2^{-i+1})|$$

$$= \Omega_n \sum_{i=1}^{\infty} 2^{npi} (2^{-i+1})^n = \Omega_n \sum_{i=1}^{\infty} 2^{npi - ni + n}$$

$\Omega_n = |B(0,1)|$

$$= 2^n \Omega_n \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i n (p-1)} < \infty,$$

kun $n(p-1) < 0 \iff p < 1$.

$\Rightarrow f \in L^p(B(0,1))$, jos $p < 1$

$$\int_{B(0,1)} |x|^{-np}\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} |x|^{-np}\,dx \ge \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} 2^{np(i-1)}\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{np(i-1)} |A_i|$$

$$= \Omega_n (2^n - 1) 2^{-np} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{npi}\, 2^{-in}$$

$$|A_i| = |B(0, 2^{-i+1})| - |B(0, 2^{-i})|$$

$$= \Omega_n \left((2^{-i+1})^n - (2^{-i})^n \right)$$

$$= \Omega_n \left(2^{-in} 2^n - 2^{-in} \right) = \Omega_n (2^n - 1) 2^{-in}$$

$$= c(m,p) \sum_{i=1}^{\infty} 2^{im(p-1)} = \infty,$$

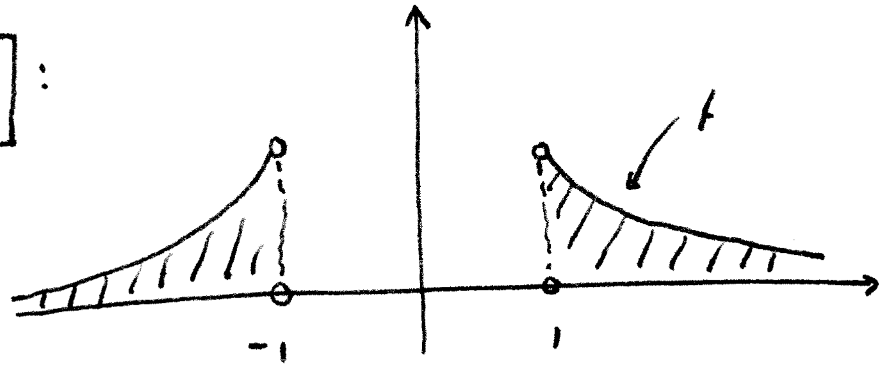
kun $m(p-1) \geq 0 \iff p \geq 1$

$\Rightarrow f \notin L^p(B(0,1))$, jos $p \geq 1$

Siis

$$f \in L^p(B(0,1)) \iff p < 1.$$

$\boxed{A = \mathbb{R}^m \setminus B(0,1)}$:



$A_i = B(0,2^i) \setminus B(0,2^{i-1})$, $i = 1,2,\dots$

Samantyyppinen päättely kuin edellä $\Rightarrow$

$$f \in L^p(\mathbb{R}^m \setminus B(0,1)) \iff p > 1$$

<u>Yleinen periaate</u>: Mitä pienempi p on, sitä pahempia lokaaleja singulariteetteja L^p-funktiolla voi olla. Toisaalta mitä suurempi p on, sitä enemmän L^p-funktio voi olla levinnyt globaalisti:

2.3. Melkein kaikkialla

Ominaisuus pätee melkein kaikkialla, jos se pätee lukuun ottamatta nollamittaista joukkoa.

Esimerkki: $\chi_{\mathbb{Q}} = 0$ melkein kaikkialla.

Väite: $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ melkein kaikkialla

Syy: $\boxed{\text{"}\Leftarrow\text{"}}$: $f = 0$ m.k. $\Rightarrow$

$$\int_A |f|^p\,dx = \underbrace{\int_{A\cap\{|f|=0\}} |f|^p\,dx}_{\substack{=0,\\ |f|=0\ (\text{m.k.})}} + \underbrace{\int_{A\cap\{|f|>0\}} |f|^p\,dx}_{\substack{=0,\\ |A\cap\{|f|>0\}|=0}}$$

$\boxed{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$: $A_i = \{x \in A : |f(x)| \geq \frac{1}{i}\}$, $i = 1, 2, \ldots$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in A : |f(x)| > 0\}$$

$$|A_i| = \int_{A_i} 1\,dx \leq i^p \int_{A_i} |f|^p\,dx \leq i^p \underbrace{\int_A |f|^p\,dx}_{=0}$$

$i|f(x)| \geq 1 \quad \forall x \in A_i$

$$\Rightarrow |A_i| = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \left|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{|A_i|}_{=0} = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ m.k. } A\text{:ssa}$$

Tästä seuraa, että $L^p(A)$ ei ole normiavaruus, sillä

$$\|f\|_p = 0 \not\Rightarrow f = 0.$$

Kuitenkin siitä saadaan normiavaruus määrittelemällä ekvivalenssirelaatio

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ m.k. } A\text{:ssa}.$$

<u>Huomautus</u>. L^p-teorian kannalta emme yleensä erottele funktioita f ja g toisistaan, jos ne yhtyvät melkein kaikkialla, sillä

(1) jos $f = g$ m.k., niin

$$f \in L^p(A) \Leftrightarrow g \in L^p(A)$$

ja silloin $\int_A |f|^p dx = \int_A |g|^p dx$ ja

(2) jos f on mitallinen ja $g = f$ m.k., niin g on mitallinen.

Merkitään

$$[f] = \tilde{f} = \{ g \in L^p(A) : g \sim f \}$$

$$= f\text{:n virittämä ekvivalenssiluokka}$$

$$\widetilde{L^p}(A) = \{ \tilde{f} : f \in L^p(A) \}$$

$$\| \tilde{f} \|_p = \| f \|_p$$

ei riipu edustajasta

Nyt pätee

$$\| \tilde{f} \|_p = 0 \iff \tilde{f} = \tilde{0},$$

missä $\tilde{0} = \{ f \in L^p(A) : f = 0 \text{ m.k. } A\text{:ssa} \}$.

SOPIMUS: Jatkossa emme käytä avaruutta $\widetilde{L^p}(A)$, vaan puhumme $L^p(A)$-funktioista. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että samastamme funktiot, jotka yhtyvät melkein kaikkialla.

Seuraava lemma näyttää, että $L^p(A)$ on lineaariavaruus.

2.4. Lemma.

(i) $f \in L^p(A)$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f \in L^p(A)$

(ii) $f, g \in L^p(A) \Rightarrow f + g \in L^p(A)$

Tod: $\boxed{(i)}$: $\displaystyle\int_A |\lambda f|^p dx = |\lambda|^p \underbrace{\int_A |f|^p dx}_{<\infty} < \infty$

$\boxed{(ii)}$: $\boxed{p=1}$: $|f+g| \le |f| + |g|$

$\boxed{1<p<\infty}$: $|f+g|^p \le (|f|+|g|)^p \le (2\max(|f|,|g|))^p$

$$= 2^p \max(|f|^p, |g|^p)$$

$$\le 2^p (|f|^p + |g|^p). \quad \square$$

2.5. **Lemma.** (Youngin epäyhtälö)

$1<p<\infty$, $a,b \ge 0 \Rightarrow$

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'},$$

missä p' on p:n Hölder-konjugaatti ja se saadaan lausekkeesta

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \iff p' = \frac{p}{p-1}$$

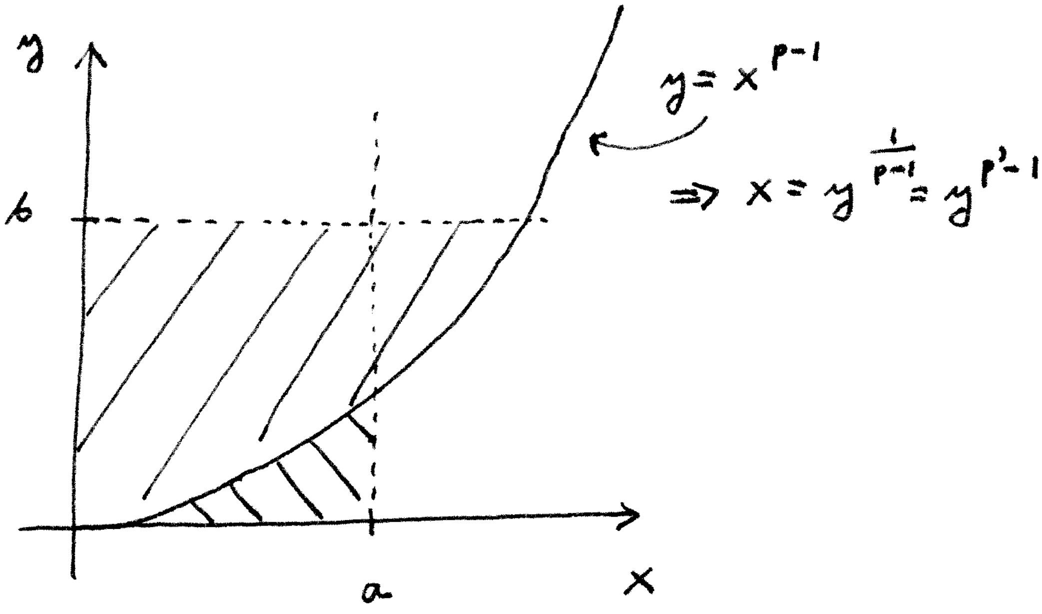
Huomautus. $p=2 \Rightarrow p'=2$

$1<p<2 \Rightarrow p'>2$

$2<p<\infty \Rightarrow 1<p'<2$

$p\to 1 \Rightarrow p'\to\infty$

Tod:



$$ab \le \int_0^a x^{p-1}\,dx + \int_0^b y^{p'-1}\,dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}. \qquad \square$$

2.6. Lause. (Hölderin epäyhtälö)

Jos $1<p<\infty$, $f \in L^p(A)$ ja $g \in L^{p'}(A)$, niin $fg \in L^1(A)$

ja

$$\int_A |fg|\,dx \le \left(\int_A |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A |g|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Huomaa: $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

Tod: $\boxed{\|f\|_p = 0}$: $\Rightarrow f = 0$ m.k. $\Rightarrow fg = 0$ m.k.

$\Rightarrow$ OK

$\boxed{\|g\|_{p'} = 0}$: OK (samoin kuin yllä)

$\boxed{\|f\|_p > 0, \ \|g\|_{p'} > 0}$:

$$\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|_p}, \quad \tilde{g} = \frac{g}{\|g\|_{p'}} \implies \|\tilde{f}\|_p = \left\| \frac{f}{\|f\|_p} \right\|_p = \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p} = 1$$

ja $\|\tilde{g}\|_{p'} = 1$

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \int_A |fg| \, dx = \int_A |\tilde{f}\tilde{g}| \, dx$$

$$\underset{\text{Young}}{\leq} \frac{1}{p} \underbrace{\int_A |\tilde{f}|^p \, dx}_{=1} + \frac{1}{p'} \underbrace{\int_A |\tilde{g}|^{p'} \, dx}_{=1} \underset{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1}{=} 1. \qquad \square$$

<u>VAROITUS</u>: $f, g \in L^p(A) \not\Rightarrow fg \in L^p(A)$

<u>Syy</u>: $A = (0,1)$, $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g = f$

$f, g \in L^1(0,1)$

$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{1}{x} \implies fg \notin L^1(0,1)$

<u>Huomautus</u>. Tapauksessa $p = 2$ saadaan Schwarzin epäyhtälö

$$\int_A |fg| \, dx \leq \left(\int_A |f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_A |g|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.7. Seuraus. (Jensenin epäyhtälö)

$1 \le p < q < \infty$, $0 < |A| < \infty \Rightarrow$

$$\left(\frac{1}{|A|} \int_A |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\frac{1}{|A|} \int_A |f|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

Tod:

$$\int_A |f|^p \, dx \le \left(\int_A |f|^{p \cdot \frac{q}{p}} \, dx \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_A 1^{\frac{q}{q-p}} \, dx \right)^{\frac{q-p}{q}}$$

$$\frac{\frac{q}{p}}{\frac{q}{p} - 1} = \frac{q}{q-p}, \text{ Hölder}$$

$$= \left(\int_A |f|^q \, dx \right)^{\frac{p}{q}} |A|^{1 - \frac{p}{q}} \qquad \square$$

Huomautus

$1 \le p < q < \infty$, $|A| < \infty \Rightarrow L^q(A) \subset L^p(A)$

VAROITUS:

$1 \le p < q < \infty$, $|A| = \infty \not\Rightarrow L^q(A) \subset L^p(A)$ tai

$L^p(A) \subset L^q(A)$

2.8. Lause. (Minkowskin epäyhtälö)

Jos $1 \le p < \infty$ ja $f, g \in L^p(A)$, niin $f+g \in L^p(A)$ ja

$$\| f+g \|_p \le \| f \|_p + \| g \|_p .$$

Huomautus. Lemma 2.4 $\Rightarrow$

$$\int_A |f+g|^p dx \le 2^p \left(\int_A |f|^p dx + \int_A |g|^p dx \right)$$

$$\Rightarrow \left(\int_A |f+g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \le 2 \left(\int_A |f|^p dx + \int_A |g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le 2 \left[\left(\int_A |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_A |g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]$$

Lauseesta 2.8 seuraa, että kolmioepäyhtälö pätee L^p-normille.

Tod: Lemma 2.4 $\Rightarrow f+g \in L^p(A)$

$\boxed{p=1}$: $|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \quad \forall\, x \in A$

$$\Rightarrow \int_A |f(x)+g(x)|\, dx \le \int_A |f(x)|\, dx + \int_A |g(x)|\, dx .$$

$\boxed{1<p<\infty}$: $\boxed{\|f+g\|_p = 0}$ $\Rightarrow$ väite selvä

$\boxed{\|f+g\|_p > 0}$:

$$\int_A |f+g|^p\,dx \le \int_A |f+g|^{p-1}|f|\,dx + \int_A |f+g|^{p-1}|g|\,dx$$

$|f+g|^p = |f+g|^{p-1}|f+g| \le |f+g|^{p-1}(|f|+|g|)$

$$\le \left(\int_A |f+g|^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_A |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Hölder

$$+ \left(\int_A |f+g|^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_A |g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \left(\int_A |f+g|^p\,dx\right)^{1-\frac{p-1}{p}} \le \left(\int_A |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_A |g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\|f+g\|_p > 0$

$\square$

Muistutus. Jono (f_i), $f_i \in L^p(A)$, $i = 1, 2, \ldots$, suppenee $L^p(A)$:ssa kohti funktiota $f \in L^p(A)$, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa i_ε s.e.

$$\| f_i - f \|_p < \varepsilon \quad \text{kun } i \geq i_\varepsilon .$$

Jono (f_i) on Cauchyn jono $L^p(A)$:ssa, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa i_ε s.e.

$$\| f_i - f_j \|_p < \varepsilon \quad \text{kun } i, j \geq i_\varepsilon .$$

Jos $f_i \to f$ $L^p(A)$:ssa, niin (f_i) on Cauchyn jono.

Syy: $\| f_i - f_j \|_p \underset{\text{Minkowski}}{\leq} \| f_i - f \|_p + \| f - f_j \|_p < \varepsilon$

kun i ja j ovat riittävän suuria.

2.9. Lause (Riesz-Fisher 1907)

Jos (f_i) on Cauchyn jono $L^p(A)$:ssa, $1 \leq p < \infty$, niin on olemassa sellainen $f \in L^p(A)$ että

$$f_i \to f \quad L^p(A)\text{:ssa.}$$

<u>Huomautus</u>. $L^p(A)$ on siis Banachin avaruus.

<u>Tod</u>: Oletetaan, että (f_i) on Cauchyn jono $L^p(A)$:ssa. Poimimme siitä osajonon seuraavalla tavalla:

Valitaan i_1 s.e.

$$\| f_i - f_j \|_p < \frac{1}{2} \quad \text{kun } i, j \geq i_1 .$$

Jatketaan rekursiivisesti: jos $i_1, i_2, \dots, i_k$ on valittu, niin valitaan $i_{k+1} > i_k$ s.e.

$$\| f_i - f_j \|_p < \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{kun } i, j \geq i_{k+1} .$$

Osajonolle (f_{i_k}) pätee

$$\| f_{i_k} - f_{i_{k+1}} \|_p < \frac{1}{2^k} , \quad k = 1, 2, \dots$$

Määritellään

$$F = | f_{i_1} | + \sum_{k=1}^{\infty} | f_{i_{k+1}} - f_{i_k} | .$$

$\Rightarrow$ F mitallinen

$$\|F\|_p = \left(\int_A \left(|f_{i_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{i_{k+1}} - f_{i_k}|\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_A \left(|f_{i_1}| + \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} |f_{i_{k+1}} - f_{i_k}|\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_A \lim_{m\to\infty} \left(|f_{i_1}| + \sum_{k=1}^{m} |f_{i_{k+1}} - f_{i_k}|\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(\int_A \left(|f_{i_1}| + \sum_{k=1}^{m} |f_{i_{k+1}} - f_{i_k}|\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Lebesguen monotonisen konvergenssin lause

$$\leq \left(\int_A |f_{i_1}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \left(\int_A |f_{i_{k+1}} - f_{i_k}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Minkowski

$$= \|f_{i_1}\|_p + \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{i_{k+1}} - f_{i_k}\|_p$$

$$\leq \|f_{i_1}\|_p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \|f_{i_1}\|_p + 1 < \infty$$

$$\Rightarrow F \in L^p(A)$$