$\boxed{k.\text{ askel}}$: k. askeleen jälkeen olemme poistaneet

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

pistevierasta avointa väliä $I_1, \ldots, I_{2^k-1}$, joille pätee

$$\sum_{i=1}^{2^k-1} |I_i| = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j$$

ja joukko

$$C_k = I_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{2^k-1} I_i$$

koostuu 2^k kappaleesta suljettuja välejä. Lisäksi

$$\begin{aligned}
|C_k| &= |I_0| - \left|\bigcup_{i=1}^{2^k-1} I_i\right| \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pist.vier.}}}{=} 1 - \sum_{i=1}^{2^k-1} |I_i| \\
&= 1 - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j .
\end{aligned}$$

Olkoon $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$. Silloin

$$\begin{aligned}
|C| = \left|\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k\right| &= \lim_{k\to\infty} |C_k| = 1 - \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \\
&= 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = 1 - (1-\alpha) = \alpha . \qquad \square
\end{aligned}$$

<u>Huomautus</u>. Edellä konstruoidun Cantor-tyyppisen joukon C komplementti $U = [0,1] \setminus C$ on välin $[0,1]$ tiheä avoin osajoukko, jonka mitta on $1-\alpha$. Näin saamme konstruoitua avoimen joukon $U \subset [0,1]$, jonka reunan $\partial U = C$ mitta on $\alpha > 0$.

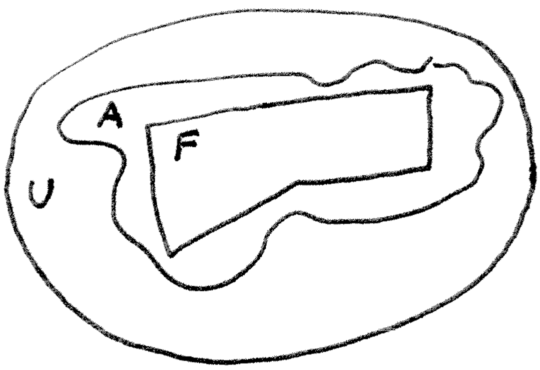
1.10. Approksimointilause

Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) $A \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen,

(ii) jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa avoin $U \supset A$ s.e. $|U \setminus A| < \varepsilon$,

(iii) jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa suljettu $F \subset A$ s.e. $|A \setminus F| < \varepsilon$.



Huomautus. Yleinen mitallinen joukko poikkeaa Borelin joukosta vain nollamittaisella joukolla.

Väite: $A \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen jos ja vain jos

$$A = B \setminus N,$$

missä $\underset{\substack{\cup \\ A}}{B}$ on Borelin joukko ja $|N| = 0$.

Syy: $\boxed{"\Rightarrow"}$: A mitallinen

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{lause } 1.10}}{\Longrightarrow} \forall\, i = 1, 2, \ldots \ \exists \text{ avoin } U_i \supset A \text{ s.e. } |U_i \setminus A| < \frac{1}{i}$$

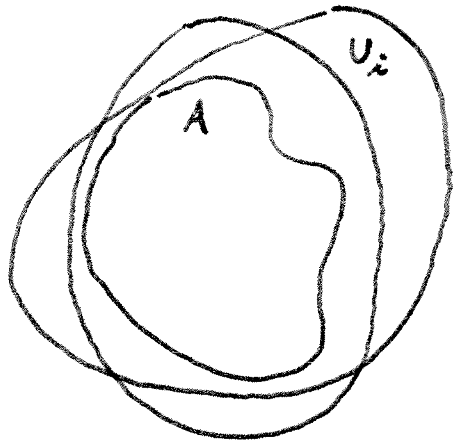
$U = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ on Borelin joukko, mutta ei avoin

$$\Rightarrow |U \setminus A| = \left| \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \right) \setminus A \right|$$

$$= \left| \bigcap_{i=1}^{\infty} (U_i \setminus A) \right|$$

$$\leq \lim_{i \to \infty} |U_i \setminus A|$$

$$\leq \lim_{i \to \infty} \frac{1}{i} = 0$$



$$A = \underset{\substack{\shortparallel \\ B}}{U} \setminus (\underset{\substack{\shortparallel \\ N}}{U \setminus A})$$

$\boxed{"\Leftarrow"}$: B Borelin joukko, $|N| = 0$, $A = B \setminus N$

N on mitallinen joukko nollamittaisena ja B on mitallinen, sillä Borelin joukot ovat mitallisia. Koska mitallisten joukkojen kokoelma on σ-algebra, niin

$$A = B \setminus N$$

on mitallinen. $\square$

Samalla tavalla voidaan näyttää, että $A \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen jos ja vain jos

$$A = B \cup N,$$

missä $B \subset A$ on Borelin joukko ja $|N| = 0$.

1.11. Lebesgue-mitalliset funktiot

Funktio $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ on Lebesgue-mitallinen, jos joukko

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \lambda\}$$

on Lebesgue-mitallinen kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Huomautus</u>. (1) Ehto voidaan yhtäpitävästi vaatia joukoille

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq \lambda\},$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \lambda\} \quad \text{tai}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \lambda\}.$$

(2) $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ on mitallinen jos ja vain jos jokaisen avoimen joukon $U \subset \mathbb{R}$ alkukuva

$$f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in U\}$$

on mitallinen.

VAROITUS: Avoimet joukot voidaan korvata Borelin joukoilla, mutta ei yleisillä Lebesgue-mitallisilla joukoilla (yksiulotteisen Lebesguen mitan suhteen).

<u>Esimerkki</u>. (1) Jatkuva funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on Lebesgue-mitallinen

<u>Syy</u>: $U \subset \mathbb{R}$ avoin $\Rightarrow$ $f^{-1}(U)$ avoin

f jatkuva

$\Rightarrow$ $f^{-1}(U)$ Lebesgue-mitallinen

avoin joukko on mitallinen

(2) $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko,

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \chi_A(x).$$

<u>Väite</u>: f on mitallinen

<u>Syy</u>: $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \lambda\} = \begin{cases} \mathbb{R}^n, & \lambda < 0, \\ A, & 0 \le \lambda < 1, \\ \emptyset, & \lambda \ge 1. \end{cases}$

1.12. <u>Mitallisten funktioiden ominaisuuksia</u>

(i) $f, g: \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ mitallisia $\Rightarrow$

$f+g$, λf $(\lambda \in \mathbb{R})$, fg, $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$,

$|f|$, $\min(f,g)$, $\max(f,g)$ ovat mitallisia

$\Big(B = \big(f^{-1}(\{\infty\}) \cap g^{-1}(\{-\infty\})\big) \cup \big(f^{-1}(\{-\infty\}) \cap g^{-1}(\{\infty\})\big)$

$x \in B \Rightarrow f(x) + g(x) = \infty - \infty$? $f+g$:lle voidaan määritellä kiinteä arvo joukossa B $\Big)$

(ii) $f_i: \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$, $i = 1, 2, \ldots$, mitallisia $\Rightarrow$

$\inf\limits_i f_i$, $\sup\limits_i f_i$, $\liminf\limits_{i\to\infty} f_i$, $\limsup\limits_{i\to\infty} f_i$,

$\lim\limits_{i\to\infty} f_i$ ovat mitallisia

(iii) f mitallinen, $0 < p < \infty \Rightarrow |f|^p$ on mitallinen ($|f|^p$:lle voidaan antaa mikä tahansa kiinteä arvo joukossa $f^{-1}(\{\infty\}) \cup f^{-1}(\{-\infty\})$)

HUOMAA: f^2 mitallinen $\not\Rightarrow$ f mitallinen

<u>Syy</u>: $E \subset \mathbb{R}$ joukko, joka ei ole mitallinen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus E \end{cases}$$

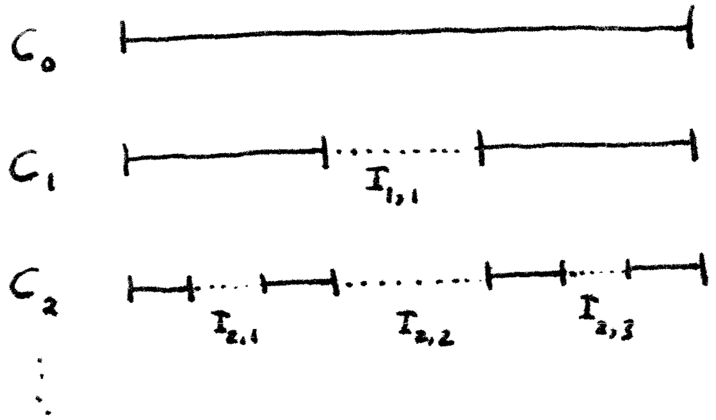
$\Rightarrow$ $f^2 = 1$ on mitallinen, mutta

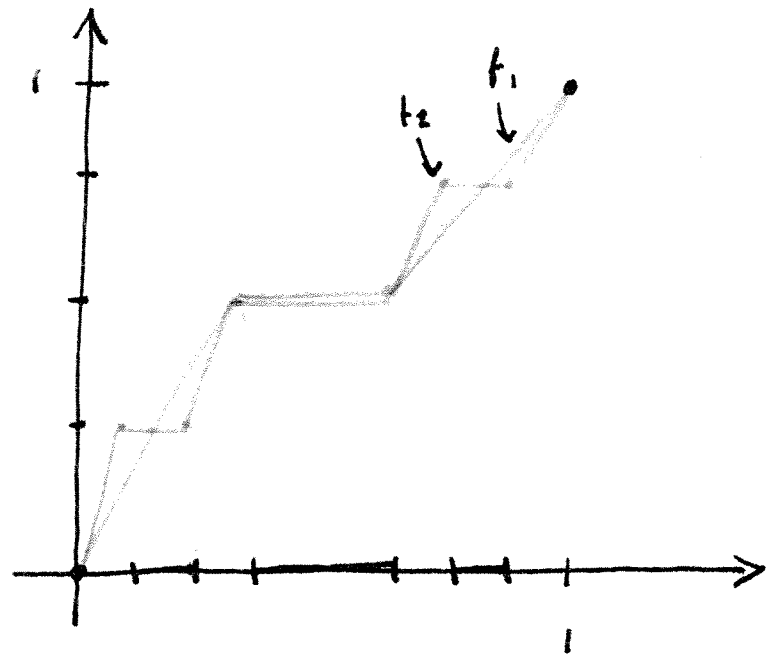
$$\{ x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0 \} = E$$

ei ole mitallinen.

1.13. <u>Cantorin funktio</u>

$$C_k = [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{2^k-1} I_{k,i}$$ kuten Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon konstruktiossa, $k = 0, 1, \ldots$.





$f_k(0)=0$, $f_k(1)=1$,

$$f_k(x) = \frac{i}{2^k}, \quad x \in I_{k,i}, \quad i = 1,2,\dots,2^k-1$$

(C_k:ssa lineaarinen)

$\Rightarrow$ $f_k \in C([0,1])$ on kasvava ja

$$|f_k(x) - f_{k+1}(x)| < \frac{1}{2^k} \quad \forall\, x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow |f_k(x) - f_{k+m}(x)| < \sum_{j=k}^{k+m-1} \frac{1}{2^j} < \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall\, x \in [0,1]$$

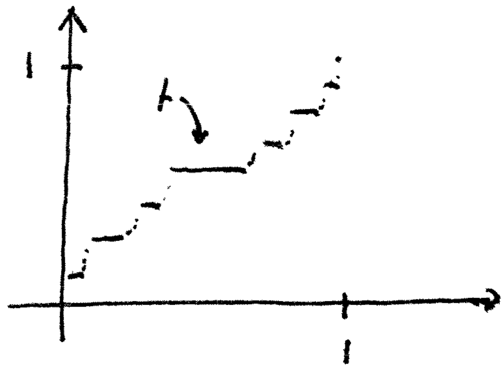
$\Rightarrow$ (f_k) on Cauchyn jono täydellisessä avaruudessa

$$(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty),$$

missä $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$

$\Rightarrow \exists\, f \in C([0,1])$ s.e. $\|f_k - f\|_\infty \to 0$, $k \to \infty$

($f_k \to f$ tasaisesti välillä $[0,1]$)



$g : [0,1] \to [0,2]$, $g(x) = x + f(x)$

$g(0) = 0$, $g(1) = 2$, $g \in C([0,1]) \Rightarrow g([0,1]) = [0,2]$

(g surjektio)

g aidosti kasvava $\Rightarrow$ g homeomorfismi

$[0,1] \setminus C = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} I_\ell$, missä välit I_ℓ, $\ell = 1,2,\dots$, ovat avoimia ja pistevieraita

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow |g(C)| &= \Big|[0,2] \setminus \bigcup_{\ell=1}^{\infty} g(I_\ell)\Big| \\
&= |[0,2]| - \Big|\bigcup_{\ell=1}^{\infty} g(I_\ell)\Big| \\
&= 2 - \sum_{\ell=1}^{\infty} |g(I_\ell)| \\
&= 2 - \sum_{\ell=1}^{\infty} |I_\ell| = 2 - 1 = 1
\end{aligned}
$$

mitallinen, sillä homeomorfismi kuvaa Borelin joukot Borelin joukoiksi

pistevieraus

$g(x) = x + a \;\; \forall x \in I_\ell$

$|C| = 0$

$|g(C)| > 0 \Rightarrow \exists\; B \subset g(C)$, joka ei ole mitallinen

1.7 (iv)

$A = g^{-1}(B) \Rightarrow A \subset C$ ja $|A| \le |C| = 0$

$\Rightarrow$ A on mitallinen

$\Rightarrow$ g kuvaa mitallisen joukon A epämitalliselle joukolle B.

$\Rightarrow \chi_A \circ g^{-1} = \chi_B$ (kahden mitallisen funktion yhdiste ei ole mitallinen)

χ_A: mitallinen funktio

χ_B: epämitallinen funktio

Huomautus. Joukko A on esimerkki mitallisesta joukosta, joka ei ole Borelin joukko.

Syy: Jos A on Borelin joukko, niin $g(A) = B$ on Borelin joukko, sillä homeomorfismi kuvaa Borelin joukot Borelin joukoiksi. Tämä on ristiriita, sillä B ei ole edes mitallinen.

1.14. Approksimointi yksinkertaisilla funktioilla

$f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ on yksinkertainen, jos se on mitallinen ja saa vain äärellisen monta positiivista arvoa.

Fakta: f on yksinkertainen jos ja vain jos

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}, \quad \text{(normaaliesitys)}$$

missä A_i, $i = 1, 2, \dots, k$, ovat pistevieraita mitallisia joukkoja ja $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Esimerkki. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$

$\Rightarrow$ f on yksinkertainen vaikka ei ole jatkuva missään pisteessä

$f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ on mitallinen jos ja vain jos on olemassa jono (f_i) s.e.

(i) f_i, $i = 1, 2, \dots$, on yksinkertainen

(ii) $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ ja

(iii) $\lim_{i \to \infty} f_i(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

Tod: (Idea) Jaetaan $[0, i)$ $i2^i$ kappaleeseen välejä $I_{k,i} = \left[\frac{k-1}{2^i}, \frac{k}{2^i}\right)$, $k = 1, 2, \dots, i2^i$

$A_{k,i} = f^{-1}(I_{k,i})$, $A_i = f^{-1}([i, \infty])$ (ovat mitallisia)

$$f_i(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^i}, & x \in A_{k,i}, \\ i, & x \in A_i. \end{cases} \qquad \square$$

1.15. Lebesguen integraali

$\boxed{\text{Vaihe 1}}$: f yksinkertainen $\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx = \sum_{i=1}^{k} a_i |A_i| \quad \text{(voi olla } \infty\text{)}$$

$\boxed{\text{Vaihe 2}}$: $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ mitallinen $\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx = \sup\Big\{ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,dx : \varphi \le f,\ \varphi \text{ yksinkertainen} \Big\} \quad \text{(voi olla } \infty\text{)}$$

$\boxed{\text{Vaihe 3}}$: $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty]$ mitallinen

$f = f^+ - f^-$, $f^+ = \max(f,0)$, $f^- = -\min(f,0)$

f mitallinen $\Leftrightarrow$ f^+ ja f^- mitallisia

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f^+\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^-\,dx}_{\text{määritelty ellei tule } \infty-\infty\text{-tilannetta}} \quad \text{(voi olla } \infty\text{)}$$

$\boxed{\text{Vaihe 4}}$: $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ on integroituva, jos

(i) f on mitallinen,

$$\left.\begin{array}{l}\text{(ii)} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, dx < \infty \text{ ja} \\[2ex] \text{(iii)} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f^- \, dx < \infty \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, dx < \infty$$

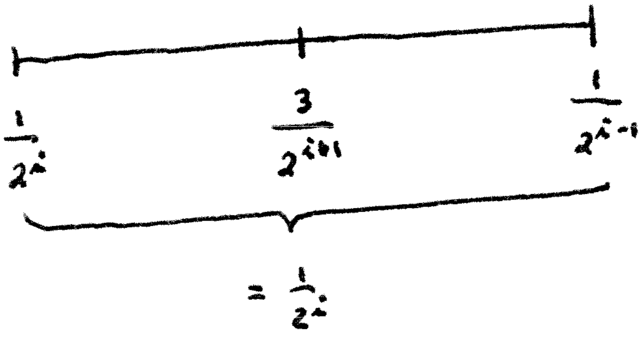
$|f| = f^+ + f^-$

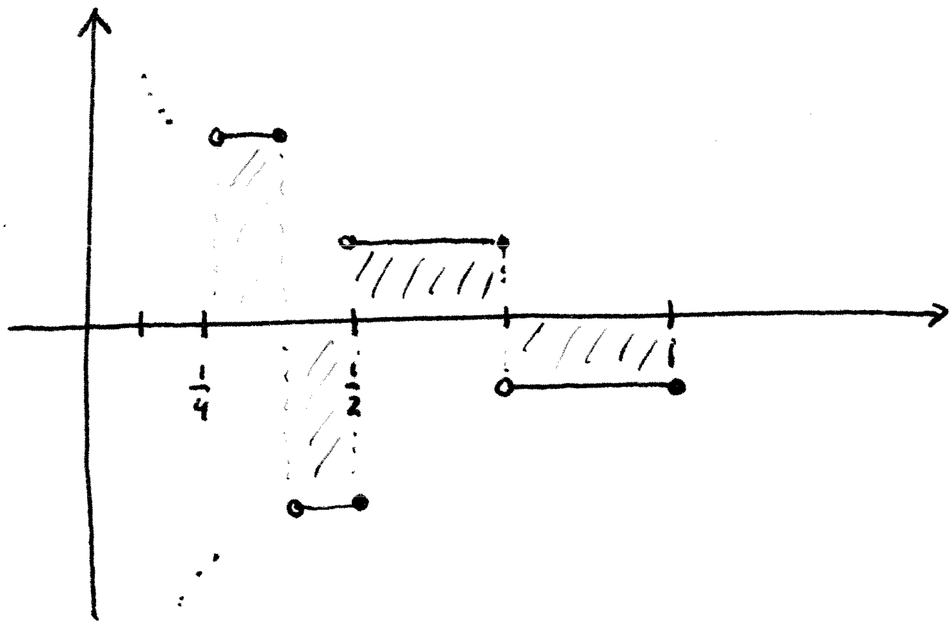
f integroituva $\Longrightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^- \, dx}_{< \infty}$$

Esimerkki: $f(0) = 0$, $x \in \left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}}\right]$, $i = 1, 2, \ldots$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{i+1}}{i}, & x \in \left(\dfrac{1}{2^i}, \dfrac{3}{2^{i+1}}\right], \\[2ex] -\dfrac{2^{i+1}}{i}, & x \in \left(\dfrac{3}{2^{i+1}}, \dfrac{1}{2^{i-1}}\right] \end{cases}$$





$$\int_{[0,1]} f^+(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i+1}}{i} \cdot \frac{2^{-i}}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

$$\int_{[0,1]} f^-(x)\,dx = \infty$$

$\Rightarrow$ f ei ole integroituva välillä $[0,1]$, mutta epäoleellinen Riemannin integraali

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx = 0$$

vastakkain menee

1.16. Lebesguen monotonisen konvergenssin lause

$f_i : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ mitallisia,

$f_1 \le f_2 \le \dots$ m.k. $\mathbb{R}^n$:ssä $\Longrightarrow$

$$\underbrace{\lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i \, dx}_{\text{kasvava jono}} = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\lim_{i\to\infty} f_i}_{\text{on olemassa m.k. ja siten mitallinen}} \, dx$$

Esimerkki: Oletus $f_i \ge 0$ ei ole turha

Syy: $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_i(x) = -\frac{1}{i}$, $i = 1, 2, \dots$

$f_1 \le f_2 \le \dots$

$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{i\to\infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f_i \, dx}_{=-\infty} = -\infty \ne 0 = \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx$$

1.17. Fatoun lemma

$f_i : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ mitallisia,

$f_i \to f$ m.k. $\mathbb{R}^n$:ssä $\Longrightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx \le \liminf_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i \, dx$$

1.18. Lebesguen dominoidun konvergenssin lause

$f_i : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ mitallisia,

$|f_i| \leq g$ m.k. $\mathbb{R}^n$:ssä, g integroituva

$f_i \to f$ m.k. $\mathbb{R}^n$:ssä $\Rightarrow$

$$\lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx$$

Esimerkki. Oletus integroituvasta majorantista ei ole turha

Syy: $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_i(x) = i\,\chi_{(0,\frac{1}{i})}(x)$, $i = 1, 2, \ldots$

$$\int_{\mathbb{R}} f_i(x)\,dx = i \cdot \frac{1}{i} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots$$

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_i(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$$

(Tämä näyttää myös sen, että Fatoun lemmassa voi olla "<".)