Sobolevin avaruus $H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ on avaruuden

$$\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{1,p} < \infty \}$$

täydellistymä normin $\|\cdot\|_{1,p}$ suhteen. Toisin sanoen $u \in H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ jos ja vain jos $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ja on olemassa jono $u_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, \ldots$, s.e. $\|u_j\|_{1,p} < \infty$ ja jolle $D_i u_j$, $i = 1, \ldots, n$, on Cauchyn jono $L^p(\mathbb{R}^n)$:ssä ja lisäksi $u_j \to u$ $L^p(\mathbb{R}^n)$:ssä.

5.18. <u>Lause</u>. (Meyers ja Serrin 1964)

$$H^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad 1 \le p < \infty.$$

<u>VAROITUS</u>: Lause ei päde, kun $p = \infty$.

<u>Esim</u>: $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u(x) = |x|$

$$\Rightarrow u \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n) \setminus H^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Tod: $\boxed{\text{"}\subset\text{"}}$: Oletetaan, että $u \in H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ja $u_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ jono kuten $H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$:n määritelmässä. Silloin $u_j \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ja $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$:n täydellisyyden (Lause 5.15) nojalla $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

$\boxed{\text{"}\supset\text{"}}$: Seuraus 5.17. $\square$

5.19. Sobolevin epäyhtälöt

$\boxed{1 \le p < \infty}$: $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$

$$\left(\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \le C r \left(\fint_{B(x,r)} |Du|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}, \quad C = C(n,p)$$

(Poincarén epäyhtälö, Lause 5.7)

$\boxed{1 \le p < n}$: $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$

$$\left(\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^{p^*} \, dy \right)^{\frac{1}{p^*}} \le C r \left(\fint_{B(x,r)} |Du|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}, \quad C = C(n,p),$$

$$p^* = \frac{pn}{n-p}$$

(Sobolev-Poincarén epäyhtälö, Lause 5.6)

$\boxed{n < p < \infty}$: $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^{1-\frac{n}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}, \quad C = C(n,p)$$

m.k. $x, y \in \mathbb{R}^n$ (Morreyn epäyhtälö, Lause 5.8)

$\boxed{p = n}$: $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$

$$\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}| \, dy \leq C \, \|Du\|_n$$

$\Rightarrow u \in BMO$ (bounded mean oscillation)

$\boxed{p = \infty}$: $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$

$$|u(x) - u(y)| \leq C \, \|Du\|_\infty \, |x-y|, \quad C = C(n)$$

m.k. $x, y \in \mathbb{R}^n$ (Lause 5.10)

Lisäksi pätee:

$\boxed{1 \leq p < n}$: $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$

$$\|u\|_{p^*} \leq C \, \|Du\|_p, \quad C = C(n,p),$$

$$p^* = \frac{pn}{n-p} \quad \text{(Lause 5.4)}$$

Todistetaan Poincarén epäyhtälö Sobolevin funktioille.

$u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$

$\Longrightarrow \exists\ u_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ s.e.

Seuraus 5.17

$\| u_j - u \|_p \to 0$ ja $\left\| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p \to 0$,

$i = 1, \dots, n$

$$\left| \left(\int_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_{B(x,r)} |u_j - (u_j)_{B(x,r)}|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \right|$$

$$\le \left(\int_{B(x,r)} | u - u_{B(x,r)} - (u_j - (u_j)_{B(x,r)}) |^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

Minkowski

$$\le \left(\int_{B(x,r)} |u - u_j|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} + | u_{B(x,r)} - (u_j)_{B(x,r)} | \, |B(x,r)|^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \| u - u_j \|_p + |B(x,r)|^{\frac{1}{p}} \underbrace{\fint_{B(x,r)} |u - u_j| \, dy}$$

$$\le \left(\fint_{B(x,r)} |u - u_j|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

Hölder

$$\leq \|u-u_j\|_p + \|u-u_j\|_p \to 0$$

$$\left| \left(\int_{B(x,r)} |Du|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_{B(x,r)} |Du_j|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}} \right|$$

$$\leq \left(\int_{B(x,r)} \big| |Du| - |Du_j| \big|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

Minkowski

$$\leq \big\| |Du| - |Du_j| \big\|_p \to 0$$

$$\Rightarrow \int_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^p \, dy$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int_{B(x,r)} |u_j - (u_j)_{B(x,r)}|^p \, dy$$

$$\leq c \lim_{j\to\infty} \int_{B(x,r)} |Du_j|^p \, dy$$

Lause 5.7

$$= c \int_{B(x,r)} |Du|^p \, dy.$$

Todistetaan vielä Morreyn epäyhtälö Sobolevin funktioille.

$u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, ~~##~~ $n < p < \infty$

$\Rightarrow \exists\, u_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ s.e.

$\| u_j - u \|_p \to 0$ ja $\| |Du_j| - |Du| \|_p \to 0$.

Lisäksi $u_j \to u$ m.k. $\mathbb{R}^n$:ssä.

$x, y \in \mathbb{R}^n$ s.e. $u_j(x) \to u(x)$ ja $u_j(y) \to u(y)$

$$\Rightarrow |u(x) - u(y)|$$

$$= \lim_{j\to\infty} |u_j(x) - u_j(y)|$$

$$\underset{\text{Lause 5.8}}{\leq} c\,|x-y|^{1-\frac{n}{p}} \lim_{j\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du_j|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\underset{\text{kuten edellä, s. 5/35}}{=} c\,|x-y|^{1-\frac{n}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

5.20. Seuraus. Oletetaan, että $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $n<p<\infty$. Silloin raja-arvo

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} u \, dy = u^*(x)$$

on olemassa jokaisessa pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$. Lisäksi on olemassa $C = C(n,p) > 0$ s.e.

$$|u^*(x) - u^*(y)| \le C \|Du\|_p |x-y|^{1-\frac{n}{p}}$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja

$$u^* = u \quad \text{m.k. } \mathbb{R}^n\text{:ssä.}$$

Huomautus. $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $n<p<\infty$
$\Rightarrow$ u:lla Hölder-jatkuva edustaja

Tod:

Väite: $\exists \lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} u \, dy = u^*(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$

Syy: $0 < r < R < \infty$

$$\left| \fint_{B(x,R)} u\,dy - \fint_{B(x,r)} u\,dy \right|$$

$$\leq \fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,R)}|\,dy$$

$$\leq \fint_{B(x,r)} \underbrace{\fint_{B(x,R)} |u(y) - u(z)|\,dz}_{\leq C R^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_p}\,dy$$

$$\leq C R^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_p \to 0, \text{ kun } R \to 0$$

Väite: $|u^*(x) - u^*(y)| \leq C \|Du\|_p |x-y|^{1-\frac{n}{p}}$

Syy: $R = 2|x-y|$

$$|u^*(x) - u^*(y)| \leq \left| u^*(x) - \fint_{B(x,R)} u\,dz \right|$$

$$+ \left| \fint_{B(x,R)} u\,dz - \fint_{B(y,R)} u\,dz \right| + \left| \fint_{B(y,R)} u\,dz - u^*(y) \right|$$