$$\Rightarrow \left( \int_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^{p^*} \, dy \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

$$\leq c \left( \int_{\mathbb{R}^n} I_1 \left( |Du| \chi_{B(x,r)} \right)^{p^*} dy \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

$$\leq c \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( |Du| \chi_{B(x,r)} \right)^{p} dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

Lause 5.3

$$= c \left( \int_{B(x,r)} |Du|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad \square$$

Huomautuksia

(1) Sobolev–Poincarén epäyhtälö pätee myös, kun $p = 1$.

(2) $p^* > p$

$p \to n \Rightarrow p^* \to \infty$

$p = 1 \Rightarrow p^* = \frac{n}{n-1}$

**5.7. Lause.** (Poincarén epäyhtälö)

Jokaiselle $1<p<\infty$ on olemassa vakio $c=c(n,p)>0$ s.e.

$$\left(\fint_{B(x,r)} |u-u_{B(x,r)}|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \le cr\left(\fint_{B(x,r)} |Du|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

kaikilla $B(x,r)\subset\mathbb{R}^n$ ja $u\in C^1(\mathbb{R}^n)$.

**Tod:** Kuten Lauseen 5.6 todistuksessa

$$|u(z)-u_{B(x,r)}| \underset{\text{Lemma 5.5}}{\le} c\, I_1\left(|Du|\chi_{B(x,r)}\right)(z)$$

$$\underset{B(x,r)\subset B(z,2r)}{\le} c\int_{B(z,2r)} \frac{|Du(y)|\chi_{B(x,r)}(y)}{|z-y|^{n-1}}\,dy$$

$$\underset{\text{Lemma 5.2}}{\le} cr\, M\left(|Du|\chi_{B(x,r)}\right)(z),$$

$$z\in B(x,r)$$

$$\Rightarrow \int_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^p \, dy$$

$$\leq c r^p \int_{\mathbb{R}^n} M(|Du| \chi_{B(x,r)})^p \, dy$$

$$\leq c r^p \int_{\mathbb{R}^n} (|Du| \chi_{B(x,r)})^p \, dy$$

Hardy-Littlewood II, Lause 3.7, $p > 1$

$$= c r^p \int_{B(x,r)} |Du|^p \, dy. \qquad \square$$

5.8. <u>Lause</u>. (Morreyn epäyhtälö)

Jokaiselle $n < p < \infty$ on olemassa vakio $c = c(n,p) > 0$ s.e.

$$|u(y) - u(z)| \leq c r \left( \fint_{B(x,r)} |Du|^p \, dw \right)^{\frac{1}{p}}$$

kaikille $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$, $y, z \in B(x,r)$ ja $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Tod:

$$|u(y)-u(z)|$$

$$\leq |u(y)-u_{B(x,r)}| + |u_{B(x,r)} - u(z)|$$

$$\leq C \int_{B(x,r)} \frac{|Du(w)|}{|y-w|^{n-1}}\,dw + C\int_{B(x,r)} \frac{|Du(w)|}{|z-w|^{n-1}}\,dw$$

Lemma 5.5

$$\leq C \left(\int_{B(x,r)} |Du|^p\,dw\right)^{\frac{1}{p}} \left[ \left(\int_{B(x,r)} |y-w|^{(1-n)p'}\,dw\right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_{B(x,r)} |z-w|^{(1-n)p'}\,dw\right)^{\frac{1}{p'}}\right]$$

Hölder

$$\int_{B(x,r)} |y-w|^{(1-n)p'}\,dw \leq \int_{B(y,2r)} |y-w|^{(1-n)p'}\,dw$$

$B(x,r) \subset B(y,2r)$, $y \in B(x,r)$

$$= \int_0^{2r}\int_{\partial B(y,\rho)} \rho^{(1-n)p'}\,dS(w)\,d\rho$$

$$= \omega_{n-1}\int_0^{2r} \rho^{(1-n)p'+n-1}\,d\rho = C r^{n-(n-1)p'}$$

$$\Rightarrow |u(y)-u(z)|$$

$$\leq C\, r^{(n-(n-1)p')\frac{1}{p'}} \left( \int_{B(x,r)} |Du|^p \, dw \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= C\, r^{1-\frac{n}{p}} \left( \int_{B(x,r)} |Du|^p \, dw \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$(n-(n-1)p')\cdot \frac{1}{p'} = \frac{n}{p'} - n + 1 = n \cdot \frac{p-1}{p} - n + 1 = 1 - \frac{n}{p}$$

$\square$

5.9. <u>Määritelmä.</u> Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Funktio $u : \Omega \to \mathbb{R}$ on Hölder-jatkuva eksponentilla $\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, jos on olemassa vakio $C > 0$ s.e.

$$|u(x)-u(y)| \leq C\,|x-y|^{\alpha}$$

kaikilla $x, y \in \Omega$. Tällöin merkitään $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

<u>Huomautus.</u> (1) Funktio $u$ on lokaalisti Hölder-jatkuva, jos jokaisella pisteellä on ympäristö, missä $u$ on Hölder-jatkuva. Vakio ja eksponentti saattavat riippua ympäristöstä!

(2) $\alpha = 1 \Rightarrow u$ on Lipschitz-jatkuva

(3) $\alpha > 1 \Rightarrow$

$$\limsup_{h\to 0} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|}{|h|}$$

$$\leq \limsup \frac{c\,|x+he_i-x|^{\alpha}}{|h|}$$

$$= c \limsup_{h\to 0} |h|^{\alpha-1} = 0$$

$\Rightarrow |Du| = 0$

(4) Lause 5.8 $\Rightarrow u \in C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$ jos $u \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n), p>n$

5.10. <u>Lause</u>. Oletetaan, että $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Silloin on olemassa $c = c(n) > 0$ s.e.

$$|u(x)-u(y)| \leq c\,|x-y| \left( M|Du|(x) + M|Du|(y) \right)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$.

<u>Tod</u>: $x, y \in B(x, 2|x-y|)$

$$|u(x)-u(y)|$$

$$\leq |u(x) - u_{B(x,2|x-y|)}| + |u_{B(x,2|x-y|)} - u(y)|$$

$$\underset{\uparrow}{\leq} C \int_{B(x,2|x-y|)} \frac{|Du(w)|}{|x-w|^{n-1}}\,dw + C \int_{B(x,2|x-y|)} \frac{|Du(w)|}{|y-w|^{n-1}}\,dw$$

Lemma 5.5

$$\underset{\uparrow}{\leq} C\,|x-y|\,\big(M|Du|(x) + M|Du|(y)\big).$$

Lemma 5.2 $\square$

$B(x,2|x-y|) \subset B(y,4|x-y|)$

Huomautus. $|Du| \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ $\underset{\uparrow}{\Rightarrow}$ $M|Du| \in L^p(\mathbb{R}^n)$

Hardy-Littlewood II
(Lause 3.9)

$|Du| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\underset{\uparrow}{\Rightarrow}$ $M|Du| < \infty$ m.k.

Hardy-Littlewood I

$$|Du| \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow M|Du| \leq \|M|Du|\|_\infty \leq \|Du\|_\infty$$

$$\Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq C\,\|Du\|_\infty\,|x-y| \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$$

5.11. Määritelmä. Oletetaan, että $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Silloin $f_i \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1,\ldots,n$, on funktion $u$ heikko osittaisderivaatta muuttujan $x_i$ suhteen, jos

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} f_i \varphi \, dx$$

kaikilla $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tällöin merkitään $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i$. $Du = (D_1 u, \ldots, D_n u)$ on $u$:n heikko gradientti.

<u>Huomautus</u>. $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx \underset{\uparrow}{=} - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \, dx, \quad i = 1, \ldots, n$$

osittaisintegrointi

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, on myös heikko osittaisderivaatta

↑ tavallinen osittaisderivaatta

<u>Määritelmän tarkoitus</u>: Heikko osittaisderivaatta on funktio, joka toteuttaa osittaisderivointikaavan y.o. mielessä.

5.12. <u>Lemma</u>. Heikot derivaatat ovat yksikäsitteisiä nollamittaista joukkoa lukuun ottamatta.

<u>Tod</u>: $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ s.e.

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f \varphi\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} g \varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} (f-g)\varphi\, dx = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

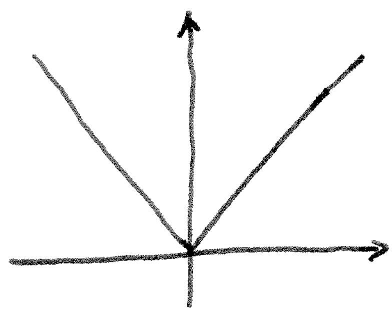
$$\Rightarrow f - g = 0 \text{ m.k.} \Rightarrow f = g \text{ m.k.}$$

Harjoitus?

$\square$

<u>Esimerkki</u>

(1) $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = |x|$



<u>Väite</u>: $u' = f$ heikossa mielessä,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -1, & x \le 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

<u>Syy</u>: Todistetaan, että

$$\int_{\mathbb{R}} u \varphi'\, dx = -\int_{\mathbb{R}} f \varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

$\operatorname{supp}\varphi \subset [a,b]$ (Käsitellään vain tapaus $a<0$, $b>0$.)

$$\int_a^b u\varphi'\,dx = \int_a^0 -x\varphi'(x)\,dx + \int_0^b x\varphi'(x)\,dx$$

$$= -\left( \Big/_a^0 x\varphi(x) - \int_a^0 \varphi(x)\,dx \right)$$

osittais-integrointi

$$+ \Big/_0^b x\varphi(x) - \int_0^b \varphi(x)\,dx$$

$$= \int_a^0 \varphi(x)\,dx - \int_0^b \varphi(x)\,dx$$

$$= -\int_a^b f\varphi\,dx$$

(2) $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

<u>Väite</u>: $u$:lla ei ole heikkoa derivaattaa

<u>Tod</u>: Vastaoletus: $\exists\, f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ s.e.

$$\int_{\mathbb{R}} u\varphi'\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f\varphi\,dx \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

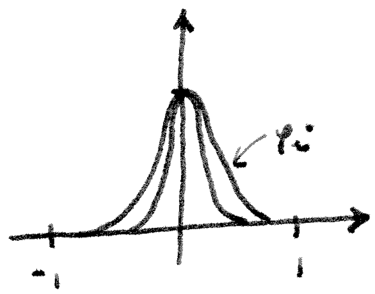
$\operatorname{supp}\varphi \subset [a,b]$, $a<0$, $b>0$

$$\int_{\mathbb{R}} u\varphi'\,dx = \int_0^b \varphi'(x)\,dx \underset{\text{analyysin peruslause}}{=} \varphi(b)-\varphi(0) = -\varphi(0)$$

Konstruoidaan $\varphi_i \in C_0^\infty((-1,1))$, $i=1,2,\dots$, s.e.

$0 \le \varphi_i \le 1$, $\varphi_i(0)=1$ $\forall i$ ja

$$\lim_{i\to\infty} \varphi_i(x) = 0 \quad \forall\ x \neq 0.$$




$$\Rightarrow\ 1 = \lim_{i\to\infty} \varphi_i(0)$$

$$= -\lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u\varphi_i'\,dx$$

$$= \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f\varphi_i\,dx \underset{\text{LDK, } |f\varphi_i| \le |f|}{=} 0 \qquad \lightning$$

5.13. <u>Määritelmä</u>. Funktio $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, kuuluu Sobolevin avaruuteen $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, jos heikot osittaisderivaatat $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i=1,\dots,n$, ovat olemassa ja kuuluvat avaruuteen $L^p(\mathbb{R}^n)$.

<u>Huomautus</u>. Kuten $L^p$-avaruuksissa samastamme Sobolevin avaruuden funktiot, jotka yhtyvät melkein kaikkialla.

5.14. <u>Määritelmä</u>. Jos $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, niin

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \||Du|\|_p .$$

5.15. <u>Lause</u>. $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, on Banachin avaruus.

<u>Tod</u>: Todistetaan aluksi, että $\|\cdot\|_{1,p}$ on normi.

$\boxed{(i)}$ : $\|u\|_{1,p} = 0 \iff u = 0$ m.k.

$\boxed{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$ : $\|u\|_{1,p} = 0 \Rightarrow \|u\|_p = 0 \Rightarrow u = 0$ m.k.

$\boxed{\text{"}\Leftarrow\text{"}}$ : $u = 0$ m.k.

$$\Rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}^n} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi\,dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi\,dx = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \text{ m.k.}, \quad i = 1, \dots, n$$

Harjoitus 9

(Tämä seuraa myös Lemma 5.12:sta, sillä 0 on 0:n heikko gradientti.)

$\Rightarrow$ $Du = 0$ m.k.

$$\Rightarrow \quad \|u\|_{1,p} = \underbrace{\|u\|_p}_{=0} + \underbrace{\||Du|\|_p}_{=0} = 0.$$

$\boxed{(ii)}$ : $\|\lambda u\|_{1,p} = |\lambda| \, \|u\|_{1,p} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (Selvä)

$\boxed{(iii)}$ : $\|u+v\|_{1,p} \leq \|u\|_p + \|v\|_p + \|Du\|_p + \|Dv\|_p$

Minkowski

$$= \|u\|_{1,p} + \|v\|_{1,p}.$$

Todistetaan sitten, että $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ on täydellinen.

Olkoon $(u_j)$ Cauchyn jono $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$:ssä.

<u>Väite</u>: $\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ on Cauchyn jono $L^p(\mathbb{R}^n)$:ssä

kaikilla $i = 1, \ldots, n$.

<u>Syy</u>: $\left\| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\|_p \leq \|u_j - u_k\|_{1,p}$.

Koska $L^p(\mathbb{R}^n)$ on täydellinen, niin jokaiselle $i = 1, \ldots, n$ on olemassa $f_i \in L^p(\mathbb{R}^n)$ s.e.

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \to f_i \quad L^p(\mathbb{R}^n)\text{:ssä}.$$

Samalla tavalla $\|u_j - u_k\|_p \leq \|u_j - u_k\|_{1,p}$ ja $\exists\, u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ s.e.

$$u_j \to u \quad L^p(\mathbb{R}^n)\text{:ssä}$$

Väite: $\frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i$ heikossa mielessä, $i = 1, \dots, n$

Syy: $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} u_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx \right|$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\| u - u_j \|_p}_{\to 0} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{p'}$$

~~Heikon derivaatan määritelmä~~

$$= -\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \varphi\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f_i \varphi\, dx$$

$$\left| -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \varphi\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} f_i \varphi\, dx \right|$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \left\| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - f_i \right\|_p \| \varphi \|_{p'}$$

Siis $\frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i$ on olemassa kaikilla $i = 1, \dots, n$ ja koska

$u_j \to u$, $\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i}$ $L^p(\mathbb{R}^n)$:ssä, niin

$u_j \to u$ $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$:ssä. $\square$

5.16. <u>Lause</u>. Oletetaan, että $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$, missä $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ on standardisilottaja.

(i) Jos $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, niin

$$D u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * Du.$$

(ii) Jos $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, niin

$$u_\varepsilon \to u$$

$W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$:ssä, kun $\varepsilon \to 0$.

<u>Tod</u>: $\boxed{(i)}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u * \varphi_\varepsilon)(x) = \left(\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} * u\right)(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)\, u(y)\, dy$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial y_i}(x-y)\, u(y)\, dy$$

$$\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) = - \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial y_i}(x-y)\,u(y)\,dy = -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)\,\frac{\partial u}{\partial y_i}(y)\,dy$$

heikon derivaatan määritelmä

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}(u * \varphi_\varepsilon)(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)\,\frac{\partial u}{\partial y_i}(y)\,dy$$

$$= \left(\varphi_\varepsilon * \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(x) \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

$\boxed{(ii)}$:

$$(i) \Rightarrow \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} = \varphi_\varepsilon * \frac{\partial u}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad L^p(\mathbb{R}^n):\text{ssä},$$

kun $\varepsilon \to 0$
(Lause 4.7)

$$\Rightarrow \| u_\varepsilon - u \|_{1,p} = \| u_\varepsilon - u \|_p + \| Du_\varepsilon - Du \|_p \to 0,$$

kun $\varepsilon \to 0$. □

5.17. Seuraus. Jos $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, niin on olemassa funktiot $u_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2, \dots$ s.e.

$$u_i \to u \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^n):\text{ssä}.$$

Tod: Lause 4.8 ja lause 5.16. □