1. Lebesguen ulkomitta ja integraali

1.1. Määritelmä. Olkoon X joukko. $\mu^*: P(X) \to [0,\infty]$ on ulkomitta joukossa X, jos

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(ii) $A \subset B \subset X \Rightarrow \mu^*(A) \le \mu^*(B)$, (monotonisuus)

(iii) $A_i \subset X$, $i = 1,2,\ldots \Rightarrow$

$$\mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$ (numeroituva subadditiivisuus)

VAROITUS: $A \cap B = \emptyset \not\Rightarrow \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$

Syy: $X = \{1,2,3\}$, $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(X) = 2$ ja $\mu^*(E) = 1$ kaikille muille $E \subset X$.

$\Rightarrow \mu^*$ on ulkomitta joukossa X, mutta jos $A = \{1\}$ ja $B = \{2\}$, niin

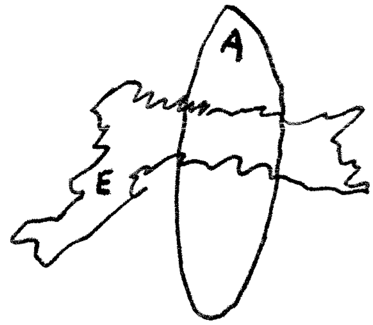
$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(\{1,2\}) = 1 \neq 2 = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Huomaa: "$\le$" pätee ehdon (iii) nojalla.

1.2. Määritelmä. Joukko $A \subset X$ on μ^*-mitallinen, jos

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

kaikille $E \subset X$.



Huomautuksia. (1) $E = (E \cap A) \cup (E \setminus A)$

$$\underset{(iii)}{\Longrightarrow} \mu^*(E) \le \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

$\Longrightarrow$ "$\le$" pätee aina

Intuitiivisesti mitallisella joukolla A jaetaan mielivaltainen joukko E kahteen osaan ja mitallisuusehto tarkoittaa sitä, että mittaa ei tule yhtään lisää. Käytännössä mitallisuuden todistaminen suoraan määritelmän avulla on hankalaa.

(2) $\mu^*(A) = 0 \Rightarrow A$ on μ^*-mitallinen

Syy: $\mu^*(\underbrace{E \cap A}_{\subset A}) + \mu^*(\underbrace{E \setminus A}_{\subset E}) \underset{(ii)}{\le} \underbrace{\mu^*(A)}_{=0} + \mu^*(E)$

(3) μ^*-mitallisten joukkojen kokoelma on σ-algebra $\mathcal{M}$:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{M}$,

(ii) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{M}$ ja

(iii) $A_i \in \mathcal{M}$, $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$.

<u>Esimerkki</u>. $X = \{1,2,3\}$, $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(X) = 2$ ja $\mu^*(E) = 1$ kaikille muille $E \subset X$ (sama kuin edellä).

$a, b \in X$, $a \neq b$, $A = \{a\}$, $E = \{a, b\}$ $\Rightarrow$

$$\mu^*(E) = \mu^*(\{a,b\}) = 1 < 2 = \mu^*(\{a\}) + \mu^*(\{b\})$$
$$= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

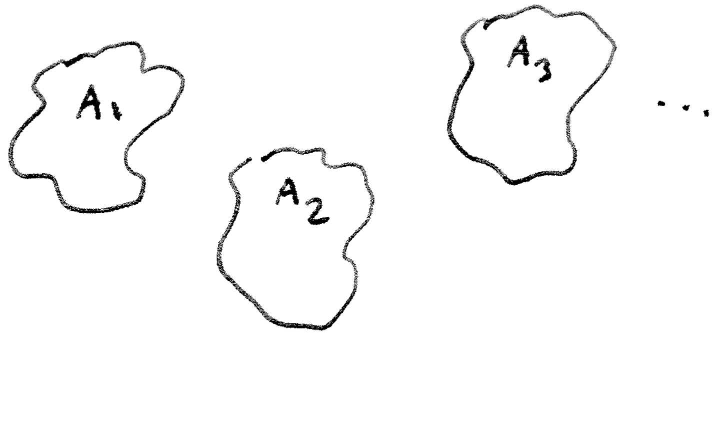
$\Rightarrow$ A ei ole μ^*-mitallinen

Samalla tavalla nähdään, että kahden pisteen muodostamat joukot eivät ole mitallisia. Siis tässä tilanteessa ainoastaan $\emptyset$ ja X ovat μ^*-mitallisia.

1.3. <u>Määritelmä</u>. Olkoon $\mathcal{M}$ σ-algebra joukossa X. $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ on mitta σ-algebrassa $\mathcal{M}$, jos

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ ja

(ii) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, kun $A_i \in \mathcal{M}$ ja joukot A_i ovat pistevieraita. (numeroituva additiivisuus)



VAROITUS: Ulkomitta on määritelty kaikille X:n osajoukoille, mutta mitta μ vain σ-algebraan $\mathcal{M}$ kuuluville joukoille. Erityisesti on mahdollista, että

$$A \subset B \in \mathcal{M}, \ \mu(B) = 0, \text{ mutta } A \notin \mathcal{M}.$$

Syy: $X = \{1,2,3\}$, $\mathcal{M} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, X\}$ on σ-algebra, $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{1\}) = 1$, $\mu(\{2,3\}) = 0$, $\mu(X) = 1$, μ on mitta σ-algebrassa $\mathcal{M}$. Nyt

$$\{2,3\} \in \mathcal{M}, \ \mu(\{2,3\}) = 0, \text{ mutta } \{2\} \notin \mathcal{M}.$$

Mittaa, jolla on ominaisuus:

$$\mu(B) = 0, \ A \subset B \Rightarrow A \in \mathcal{M}$$

sanotaan täydelliseksi mitaksi. Jokainen mitta voidaan täydellistää luonnollisella tavalla.

Seuraava lause osoittaa, että jokainen ulkomitta indusoi täydellisen mitan.

1.4. Lause. Olkoon μ^* ulkomitta joukossa X. Silloin ulkomitan μ^* rajoittuma μ^*-mitallisten joukkojen σ-algebraan on mitta.

SOPIMUS: Tällä kurssilla käsitellään ulkomittoja ja niitä saatetaan kutsua mitoiksi. Joukot ovat yleensä mitallisia, joten edellisen lauseen nojalla ero ei ole kovin suuri.

1.5. Lause. Olkoon μ^* ulkomitta joukossa X ja $A_i \subset X$, $i = 1, 2, \dots$, μ^*-mitallisia.

(i) $A_1 \subset \dots \subset A_i \subset A_{i+1} \subset \dots \Rightarrow$

$$\lim_{i\to\infty} \mu^*(A_i) = \mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big).$$

(ii) $A_1 \supset \dots \supset A_i \supset A_{i+1} \supset \dots$, $\mu^*(A_i) < \infty$ jollain i $\Rightarrow$

$$\lim_{i\to\infty} \mu^*(A_i) = \mu^*\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big).$$

Huomautuksia. (1) Tulokset eivät yleensä päde ilman mitallisuusoletusta.

(2) Ehdosta $\mu^*(A_i) < \infty$ ei voida luopua kohdassa (ii).

Syy: $X = \mathbb{R}$, μ = Lebesguen (pituus)mitta

$A_i = [i, \infty)$, $i = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, mutta

$|A_i| = \infty \quad \forall\, i = 1, 2, \dots$

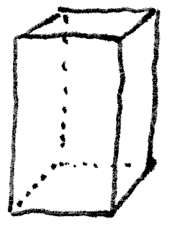
$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} |A_i| = \infty$, mutta $\Big|\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big| = |\emptyset| = 0.$

1.6. Lebesguen ulkomitta ($X = \mathbb{R}^n$)

$$I = \{ x \in \mathbb{R}^n : a_i \le x_i \le b_i ,\ i = 1,2,\dots,n \}$$

$$= [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

on n-ulotteinen suljettu väli ja sen geometrinen mitta



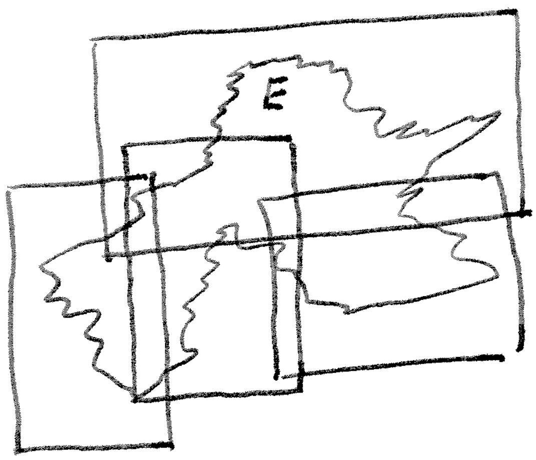
$$|I| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\dots(b_n - a_n).$$

Joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesguen ulkomitta on

$$|E| = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| ,$$

missä infimum otetaan yli kaikkien suljettujen välien numeroituvien kokoelmien, joille pätee

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i .$$



1.7. Lebesguen mitan ominaisuuksia

(i) Lebesguen ulkomitta on ulkomitta.

(ii) Lebesguen ulkomitan rajoittuma Lebesgue-mitallisiin joukkoihin on mitta.

(iii) Borelin joukot ovat pienin σ-algebra, joka sisältää avoimet joukot. Kaikki Borelin joukot ovat Lebesgue-mitallisia, mutta on olemassa Lebesgue-mitallisia joukkoja, jotka eivät ole Borelin joukkoja.

(iv) On olemassa joukkoja, jotka eivät ole Lebesgue-mitallisia. Itse asiassa jokainen mitallinen $A \subset \mathbb{R}^n$, jolle pätee $|A| > 0$, sisältää joukon joka ei ole mitallinen.

(v) Lebesguen mitan määritelmässä olevat välit voidaan olettaa sisuksiltaan pistevieraiksi.

(vi) Määritelmässä olevat välit voidaan olettaa avoimiksi.

(vii) Määritelmässä olevat välit voidaan olettaa kuutioiksi.

(viii) Määritelmässä olevat välit voidaan korvata myös palloilla.

1.8. Nollamittaiset joukot

Joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on nollamittainen, jos $|E| = 0$.

Tämä tarkoittaa sitä, että jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa välit I_i, $i = 1, 2, \ldots$, s.e.

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon.$$

Esimerkki: $(n=1)$

(1) $|\{x\}| = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Syy: $\varepsilon > 0$

$$\{x\} \subset \left[x - \frac{\varepsilon}{3}, x + \frac{\varepsilon}{3}\right] = I \quad \text{ja} \quad |I| = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$$

(2) $|\mathbb{Q}| = 0$

Syy: $\mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$ ($\mathbb{Q}$ on numeroituva)

$$\Rightarrow |\mathbb{Q}| = \left|\bigcup_{i=1}^{\infty} \{x_i\}\right| \underset{\text{numeroituva subadditiivisuus}}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{|\{x_i\}|}_{=0} = 0$$

HUOMAA: Sama argumentti näyttää, että kaikki numeroituvat joukot ovat nollamittaisia.

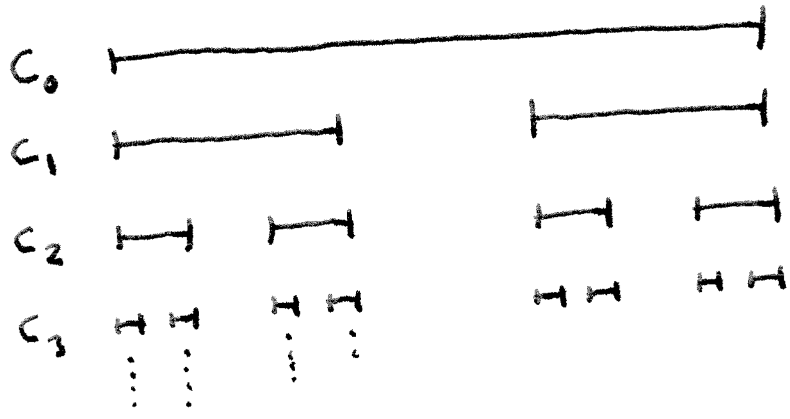
$\boxed{\text{Toinen tapa}}$: $\varepsilon > 0$

$$\{x_i\} \subset \left[x - \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^i},\ x + \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^i}\right] = I_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow |I_i| = \frac{2}{3 \cdot 2^i}\varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = \frac{2}{3}\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$$

(3) Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko



$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k = \text{Cantorin } \tfrac{1}{3}\text{-joukko}$$

$$|C_k| = \sum_{i=1}^{2^k} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$\varepsilon > 0$. Valitaan k s.e. $\left(\frac{2}{3}\right)^k < \varepsilon$

Nyt C_k:n muodostavat välit I_i, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$, peittävät C:n ja

$$\sum_{i=1}^{2^k} |I_i| = \left(\frac{2}{3}\right)^k < \varepsilon$$

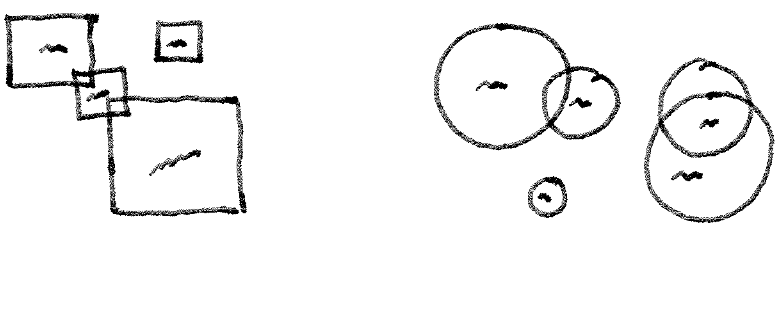
$\Rightarrow |C| = 0$ (C on ylinumeroituva nollamittainen joukko)

<u>Huomautus</u>. Kompakteille joukoille, kuten Cantorin joukko, Lebesguen ulkomitan määritelmässä riittää äärellinen määrä (avoimia) välejä. Yleensä rajoittuminen äärelliseen määrään välejä johtaa eri tulokseen.

<u>Syy</u>: Jos $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ peitetään äärellisellä määrällä välejä, niin välit peittävät koko välin $[0,1]$ ja niiden pituuksien summa on vähintään yksi. Näin äärellisellä määrällä välejä mitaten saadaan vähintään yksi, mutta edellisen esimerkin nojalla

$$|\mathbb{Q}\cap[0,1]| = 0.$$

<u>Käytännön ohje</u>. Lebesguen mitan ominaisuuksien nojalla välit voidaan korvata kuutioilla tai palloilla nollamittaisuutta tutkittaessa. Tästä havainnosta saattaa olla hyötyä, kun $n \geq 2$.



1.7. Cantor-tyyppiset joukot

Cantorin $\frac{1}{3}$-joukolla C on seuraavat ominaisuudet:

(i) $C \neq \emptyset$,

(ii) C on kompakti (C on suljettu ja rajoitettu),

(iii) C:ssä ei ole eristettyjä pisteitä (jokainen C:n piste on kasaantumispiste),

(iv) C:ssä ei ole sisäpisteitä.

Syy: $\operatorname{int} C \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ avoin $I \subset C$, $|I| > 0$

Valitaan k s.e. $2^{-k} \leq |I|$.

$$C \subset C_k = \bigcup_{i=1}^{2^k} I_i, \quad |I_i| = 3^{-k}$$

$\Rightarrow I \subset I_i$ jollekin i

$$\Rightarrow |I| \leq |I_i| \Rightarrow 2^{-k} \leq |I| \leq |I_i| \leq 3^{-k} \quad \lightning$$

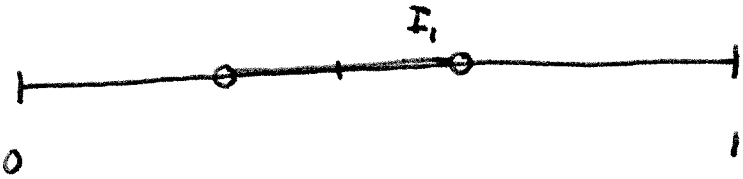
Nyt voisi ajatella, että tämäntyyppisen joukon pitäisi aina olla nollamittainen, mutta näin ei kuitenkaan ole.

Väite: Jokaiselle $0 < \alpha < 1$ on olemassa Cantor-tyyppinen joukko $C \subset [0,1]$, jonka Lebesguen mitta on α.

Syy: $\alpha_j = \dfrac{1-\alpha}{2^j}$, $j = 1, 2, \dots$

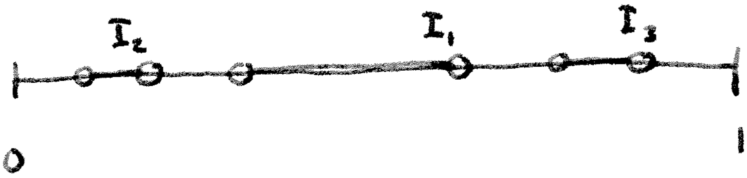
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = (1-\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1 - \alpha$$

$\boxed{1.\ \text{askel}}$: Poistetaan välin $I_0 = [0,1]$ keskeltä avoin väli I_1, jonka pituus $|I_1| = \alpha_1$.



Merkitään $C_1 = I_0 \setminus I_1$.

$\boxed{2.\ \text{askel}}$: C_1 koostuu kahdesta suljetusta välistä. Poistetaan näiden välien keskeltä kaksi avointa väliä I_2 ja I_3, jotka ovat yhtä pitkiä ja joiden yhteenlaskettu pituus on α_2.



Merkitään $C_2 = I_0 \setminus (I_1 \cup I_2 \cup I_3)$.

Jatketaan näin.