Analyysi I

9. harjoitus

1. Olkoon $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\frac{1}{i}, \frac{1}{i} + \frac{1}{i^4}] \subset \mathbb{R}$. Mitkä pisteet ovat E:n tiheyspisteitä.

2. Näytä, että ei ole olemassa mitallista joukkoa $E \subset \mathbb{R}^n$, jolle pätee

$$|E \cap B(x,r)| = \frac{1}{2} |B(x,r)|$$

kaikilla $x \in E$ ja $0 < r < 1$.

3. Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin joukko, jolla on seuraava ominaisuus: on olemassa γ, $0 < \gamma < 1$, s.e.

$$|\Omega \cap B(x,r)| \geq \gamma |B(x,r)|$$

kaikilla $x \in \partial\Omega$ ja $r > 0$. Näytä, että $|\partial\Omega| = 0$.

4. Todista luentojen lause 4.3. (Opastus: Fubini.)

5. Oletetaan, että $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ja $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Todista, että $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ja että $f * g$ on tasaisesti jatkuva. (Opastus: Hölder ja lause 2.21.)

6. Oletetaan, että f ja g ovat kuten tehtävässä 6. Todista, että $\lim_{|x| \to \infty} (f * g)(x) = 0$. Anna esimerkki funktioista $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ s.e. $\lim_{|x| \to \infty} (f * g)(x) \neq 0$.

7. Näytä, että ei ole olemassa funktiota $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ s.e. $f * g = f$ kaikilla $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

8. Oletetaan, että $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on sellainen funktio, että

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x)\, dx = 0$$

kaikilla $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Näytä, että $f(x) = 0$ m.k. $x \in \mathbb{R}^n$. (Opastus: $g(y) = \phi_\varepsilon(x-y)$.)