Analyysi I

8. harjoitus

1. Määritä funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$, $a<b$, maksimaalifunktio.

2. Näytä, että jos on olemassa sellainen piste $x_0 \in \mathbb{R}^n$ että $Mf(x_0) = 0$, niin silloin $Mf(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Näytä, että jos $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, niin $Mf(x) < \infty$ m.k. $x \in \mathbb{R}^n$. (Opastus: Hardy-Littlewoodin lauseet)

4. Todista, että jos $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ja on olemassa yksikin sellainen piste $x_0 \in \mathbb{R}^n$, että $Mf(x_0) < \infty$, niin silloin $Mf(x) < \infty$ m.k. $x \in \mathbb{R}^n$.

5. Oletetaan, että $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ on Lipschitz-jatkuva eli on olemassa vakio $L \ge 0$ s.e.

$$|f(x) - f(y)| \le L\,|x-y|$$

kaikille $x, y \in \mathbb{R}^n$. Todista, että Mf on Lipschitz-jatkuva samalla vakiolla.

(Opastus: $|Mf(x+h) - Mf(x)| \le M(f_h - f)(x)$, missä $f_h(x) = f(x+h)$.)

6. Merkitään $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$, $\lambda > 0$. Näytä, että on olemassa sellainen vakio $c = c(n)$, että

$$\int_{E_\lambda} |f(x)|\,dx \leq c\lambda |E_\lambda|$$

jokaiselle $\lambda > 0$ ja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(Opastus: sovella Vitalin peitelausetta palloihin $B(x, \frac{1}{2}\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus E_\lambda))$.)

7. Oletetaan, että $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ on jatkuva. Todista, että Mf on jatkuva.