Analyysi I

7. harjoitus

1. Mitallinen funktio $f:\mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty]$ kuuluu heikkoon $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, jos on olemassa vakio c, $0 \le c < \infty$, s.e.

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}| \le \frac{c}{\lambda^p}$$

kaikilla $\lambda > 0$. Näytä, että $L^p(\mathbb{R}^n) \subset$ heikko $L^p(\mathbb{R}^n)$ ja heikko $L^p(\mathbb{R}^n) \not\subset L^p(\mathbb{R}^n)$.

2. Oletetaan, että f ja g kuuluvat heikkoon $L^p(\mathbb{R}^n)$ ja määritellään

$$|||f||| = \sup_{\lambda > 0} \lambda \, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}}.$$

Todista:

(i) $|||f||| = 0 \iff f(x) = 0$ m.k. $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $|||\alpha f||| = |\alpha| \, |||f||| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

(iii) $|||f+g||| \le 2\left(|||f||| + |||g|||\right)$.

(iv) Näytä, että kolmioepäyhtälö $|||f+g||| \le |||f||| + |||g|||$ ei päde.

3. Määritellään

$$\|f\| = \sup |E|^{\frac{1-p}{p}} \int_E |f| \, dx, \quad 1 < p < \infty,$$

missä supremum otetaan yli kaikkien mitallisten joukkojen E, $0 < |E| < \infty$.

(i) Todista, että $\|\cdot\|$ on normi heikossa $L^p(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Näytä, että on olemassa vakio c s.e.

$$|||f||| \leq \|f\| \leq c\,|||f|||$$

kaikille $f \in$ heikko $L^p(\mathbb{R}^n)$.

4. Oletetaan, että $f \in$ heikko $L^p(\mathbb{R}^n)$ ja

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}| < \infty.$$

Näytä, että

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q \, dx < \infty$$

kaikilla q, $0 < q < p$.

5. $f \in (\text{heikko } L^p(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Näytä, että $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ kaikilla $q > p$.

6. Oletetaan, että $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

(i) Näytä, että jokaisella r, $0 < r < \infty$, funktio

$$x \mapsto \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy$$

on jatkuva x:n suhteen.

(ii) Näytä, että jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ funktio

$$r \mapsto \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy$$

on jatkuva r:n suhteen, $0 < r < \infty$.