Analyysi I

6. harjoitus

[illegible] 12.3.
Harjoitus 5 to 13.3.
Harjoitus 6 to 27.3. (voi palauttaa kirjallisena)

1. Oletetaan, että $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Todista, että

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|.$$

2. Oletetaan, että $1 \le p < q \le \infty$. Todista, että

$$L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset L^q_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

3. Todista, että jatkuva funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on tasaisesti jatkuva $\mathbb{R}^n$:n kompakteissa osajoukoissa.

4. Jos $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, niin

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{|x-y| : y \in A\}.$$

(i) Näytä, että on olemassa $x_0 \in \overline{A}$ s.e.

$$\operatorname{dist}(x, A) = |x - x_0|.$$

(ii) Näytä, että $x \in \overline{A} \iff \operatorname{dist}(x, A) = 0$.

(iii) Näytä, että $\operatorname{dist}(x, A) = \operatorname{dist}(x, \overline{A})$.

(iv) Näytä, että $\overline{A} = \overline{B} \iff \operatorname{dist}(x, A) = \operatorname{dist}(x, B)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

5. Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin ja

$$\Omega_i = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \tfrac{1}{i}\} \cap B(0, i),$$

$i = 1, 2, \ldots$ Näytä, että $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty \Omega_i$.

6. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$. Silloin f on alaspäin puolijatkuva, jos joukko $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \lambda\}$ on avoin kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Todista, että χ_A on alaspäin puolijatkuva jos ja vain jos A on avoin.

(ii) Todista, että jos f_i, $i = 1, 2, \ldots$, ovat alaspäin puolijatkuvia, niin $\sup f_i$ on alaspäin puolijatkuva

(iii) Todista, että f on alaspäin puolijatkuva jos ja vain jos $f(x) \leq \liminf_{y \to x} f(y)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

7. Oletetaan, että $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ on alaspäin puolijatkuva ja alhaalta rajoitettu $\mathbb{R}^n$:ssä. Näytä, että on olemassa jatkuvat funktiot $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s.e.

$$f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f \quad \text{ja} \quad \lim_{i \to \infty} f_i(x) = f(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

(Opastus: $f_i(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left(f(y) + i|x-y| \right)$.)