Analyysi I

5. harjoitus

1. Oletetaan, että $\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\,dx < \infty$ jollain $0 < p < \infty$.

Todista, että

$$\lim_{p \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\,dx = \left| \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\} \right| .$$

(Opastus: Tutki joukkoja $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |f(x)| \le 1\}$ ja $\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > 1\}$. Käytä konvergenssilauseita.)

2. Tutkitaan funktiojonoa (f_i), missä $f_i : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_i(x) = \begin{cases} ix, & x \in [0, \frac{1}{i}], \\ 1, & x \in (\frac{1}{i}, 1], \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots$

(i) Määritä $f(x) = \lim_{i \to \infty} f_i(x)$ kaikilla $x \in [0,1]$.

(ii) Suppeneeko jono $L^p([0,1])$:ssä, kun $1 \le p < \infty$?

(iii) Suppeneeko jono $L^\infty([0,1])$:ssä?

3. Oletetaan, että $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$.

(i) Todista, että

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} fg\,dx \right| \le \|f\|_p$$

kaikilla $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, $\|g\|_{p'} = 1$.

(ii) Todista, että on olemassa $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ s.e.

$\|g\|_{p'} = 1$ ja

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} fg \, dx \right| = \|f\|_p .$$

(Opastus: $g = \dfrac{|f|^{\frac{p}{p'}} \operatorname{sgn} f}{\|f\|_p^{\frac{p}{p'}}}$, $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$)

4. Oletetaan, että $f_i \to f$ $L^p(\mathbb{R}^n)$:ssä kun $i \to \infty$ ja $1 \le p \le \infty$. Todista, että

$$\lim_{i \to \infty} |\{x \in \mathbb{R}^n : |f_i(x) - f(x)| > \lambda\}| = 0$$

kaikilla $\lambda > 0$.

5. Onko $\|\cdot\|_p$ normi, kun $0 < p < 1$? (Käytetään tavallista tulkintaa, että funktiot jotka yhtyvät melkein kaikkialla samaistetaan.)

6. (Vaativa) Oletetaan, että $f_i, f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2, \dots$, $1 \le p < \infty$ ja että $f_i \to f$ m.k. Todista, että

$$\|f_i - f\|_p \to 0 \iff \|f_i\|_p \to \|f\|_p$$

kun $i \to \infty$. (Opastus: $2^p (|f|^p + |f_i|^p) - |f - f_i|^p \ge 0$).

Lisäkysymys: Päteekö tämä, kun $p = \infty$?