Analyysi I

4. harjoitus

1. Oletetaan, että $\{x_i\}$ on yksikköpallon $B(0,1)$ numeroituva ja tiheä osajoukko. Määritellään $f: B(0,1) \to [0,\infty]$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x - x_i|^{-\alpha}.$$

Millä α:n arvoilla $f \in L^p(B(0,1))$, $1 \le p < \infty$?

2. Anna esimerkki funktiosta $f: B(0,1) \to [-\infty, \infty]$, joka kuuluu jokaiseen avaruuteen $L^p(B(0,1))$, $1 \le p < \infty$, mutta ei kuulu avaruuteen $L^\infty(B(0,1))$.

3. Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen joukko ja $|A| < \infty$. Todista käyttämättä Hölderin epäyhtälöä, että $L^q(A) \subset L^p(A)$, kun $1 \le p < q < \infty$.
(Opastus: Tutki joukkoa $\{x \in A : |f(x)| < 1\}$.)

4. Oletetaan, että $1 \le p < r < q < \infty$. Todista, että

$$L^r(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) + L^q(\mathbb{R}^n).$$

Tämä tarkoittaa sitä, että jokaiselle $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ on olemassa sellaiset funktiot $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ja $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, että $f = g + h$.

$$\left(\text{Opastus:} \quad g(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| > 1, \\ 0, & |f(x)| \le 1 \end{cases} \right)$$

5. Oletetaan, että $1 \le p < r < q < \infty$.

(a) Todista, että $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n) \subset L^r(\mathbb{R}^n)$.

(Sama apuarvio kuin tehtävässä 4.)

(b) Todista, että $\|f\|_r \le \|f\|_p^{\alpha} \|f\|_q^{1-\alpha}$, missä $0 < \alpha < 1$ määräytyy yhtälöstä

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}.$$

6. Oletetaan, että $1 \le p < q < \infty$. Näytä, että

$$\left(L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)\right) \subset \left(L^q(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)\right)$$

ja että

$$\|f\|_q \le \|f\|_p^{\frac{p}{q}} \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{q}}.$$

7. Oletetaan, että $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$. Määritellään

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } |f(x)| \le i \text{ ja } |x| \le i, \\ 0 & \text{muulloin,} \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots$

Todista seuraavat väitteet:

(a) $\lim_{i \to \infty} f_i(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$

(b) $\|f_i\|_p \le \|f\|_p$, $i = 1, 2, \ldots$

(c) $f_i \to f$ $L^p(\mathbb{R}^n)$:ssä kun $i \to \infty$.