Analyysi I

3. harjoitus

MUISTUTUS: 11.–15.2.2008 ei luentoja eikä harjoituksia

1. Oletetaan, että $f_i : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$, $i = 1,2,\dots$, ovat mitallisia funktioita. Näytä, että

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{\infty} f_i \, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_i \, dx.$$

(Opastus: Monotonisen konvergenssin lause.)

2. Oletetaan, että A_i, $i = 1,2,\dots$, ovat pistevieraita mitallisia joukkoja, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ja $f : A \to [0,\infty]$ mitallinen funktio. Näytä, että

$$\int_A f \, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, dx.$$

3. Oletetaan, että $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty]$ on mitallinen funktio ja että $g : \mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty]$ on funktio, jolle pätee $g(x) = f(x)$ m.k. $x \in \mathbb{R}^n$. Todista, että g on mitallinen.

4. Oletetaan, että $f, g : \mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty]$ ovat mitallisia funktioita ja $f = g$ m.k. $\mathbb{R}^n$:ssä. Näytä, että

$$f \in L^p(\mathbb{R}^n) \iff g \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

ja silloin $\|f\|_p = \|g\|_p$.

5. Näytä, että jos $f \in L^p(A)$, $1 \le p < \infty$, niin $|f| < \infty$ m.k. A:ssa.

6. Jos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on sellainen funktio, että

$$\int_A f(x)\,dx \ge 0$$

jokaiselle mitalliselle $A \subset \mathbb{R}^n$, niin näytä, että $f \ge 0$ m.k. $\mathbb{R}^n$:ssä.

7. Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen joukko, $|A| < \infty$ ja $f : A \to [-\infty, \infty]$ on mitallinen funktio. Todista, että $f \in L^p(A)$, $1 \le p < \infty$, jos ja vain jos

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{ip} \left| \{ x \in A : f(x) > 2^i \} \right| < \infty .$$