Analyysi I

2. harjoitus

1. Todista, että joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on nollamittainen jos ja vain jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa sellaiset pallot $B(x_i, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_i| < r_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, että

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i) \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |B(x_i, r_i)| < \varepsilon .$$

2. Todista, että

$$|E| = \inf \{ |U| : E \subset U,\ U \text{ avoin} \}$$

jokaiselle $E \subset \mathbb{R}^n$.

3. Todista, että

$$|A| = \sup \{ |K| : K \subset A,\ K \text{ kompakti} \}$$

jokaiselle Lebesgue-mitalliselle $A \subset \mathbb{R}^n$.

4. Todista, että homeomorfismi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kuvaa Borelin joukot Borelin joukoiksi.

(Opastus: $\{ A \subset \mathbb{R}^n : f(A) \text{ on Borelin joukko} \}$ on σ-algebra, joka sisältää avoimet joukot.)

5. Todista, että jatkuva funktio $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kuvaa kompaktit joukot kompakteiksi joukoiksi.

6. Funktio $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on Lipschitz-jatkuva, jos on olemassa vakio L s.e.

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$$

kaikille $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(i) Todista, että Lipschitz-funktio $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kuvaa nollamittaiset joukot nollamittaisiksi joukoiksi.

(ii) Todista, että Lipschitz-funktio $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kuvaa mitalliset joukot mitallisiksi joukoiksi.

(Opastus: Mitallinen joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ voidaan esittää muodossa $B \cup N$, missä B on numeroituvan monen kompaktin joukon yhdiste ja $|N| = 0$.)