Analyysi I

12. harjoitus

1. Oletetaan, että $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$. Todista, että on olemassa jono $u_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ s.e. $u_i \to u$ $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$:ssä.

2. Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu avoin joukko. Todista, että on olemassa $c = c(n,p)$ s.e.

$$\int_\Omega |u|^p dx \le c \operatorname{diam}(\Omega)^p \int_\Omega |Du|^p dx$$

kaikille $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $1 \le p < \infty$.

(Opastus: Poincaré.)

3. Oletetaan, että $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < n$. Todista, että on olemassa vakio $c = c(n,p)$ s.e.

$$\left(\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^{p^*} dy \right)^{\frac{1}{p^*}} \le c r \left(\fint_{B(x,r)} |Du|^p dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

missä $p^* = \dfrac{pn}{n-p}$, kaikilla $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$.

4. Oletetaan, että $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $p > n$. Todista, että on olemassa vakio $c = c(n,p)$ s.e.

$$\left(\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^{q} dy \right)^{\frac{1}{q}} \le c r \left(\fint_{B(x,r)} |Du|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

kaikilla $q > p$ ja $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$.

(Opastus: Morrey.)

5. Olkoon $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u(x) = |x|$. Todista, että $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

6. Jos $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ ja $Du = 0$ m.k., niin näytä, että $u = 0$ m.k.