Analyysi I

11. harjoitus

1. Näytä, että luentojen lauseen 5.4 eksponenttia p^* ei voida korvata millään toisella eksponentilla.
(Opastus: tutki funktioita $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$, $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$.)

2. Oletetaan, että $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$. Todista, että $\alpha u + \beta v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja että

$$D(\alpha u + \beta v) = \alpha Du + \beta Dv.$$

3. Oletetaan, että $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Todista, että

$$|f(x) - f_{B(x,r)}| \le \sum_{j=0}^{\infty} |f_{B(x,2^{-j-1}r)} - f_{B(x,2^{-j}r)}|$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$.

4. Oletetaan, että $f \in C(\mathbb{R}^n)$ ja että

$$\fint_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}|\, dy \le c r^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

kaikilla palloilla $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$. Todista, että

$$|f(x) - f_{B(x,r)}| \le c r^\alpha$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$.

5. Todista, että tehtävän 4 oletuksilla f on Hölder-jatkuva $\mathbb{R}^n$:ssä eksponentilla α.

6. Näytä, että jos f on Hölder-jatkuva $\mathbb{R}^n$:ssä eksponentilla α, $0<\alpha<1$, niin

$$\fint_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}|\, dy \le c r^{\alpha}$$

kaikilla palloilla $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$.

7. Todista, että $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ on Hölder-jatkuva eksponentilla α, jos

$$\left(\fint_{B(x,r)} |Du|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \le c r^{\alpha-1}, \quad p>n,$$

kaikilla palloilla $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$.