Analyysi I

10. harjoitus

1. Olkoon μ Borelin mitta $\mathbb{R}^n$:ssä ja $0<\alpha<n$. Todista, että

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\, d\mu(y) = (n-\alpha)\int_0^\infty r^{\alpha-n-1}\mu(B(x,r))\, dr.$$

(Opastus:

2. Oletetaan, että $E\subset\mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen joukko s.e. $0<|E|<\infty$, $x\in\mathbb{R}^n$ ja $0<\alpha<n$. Näytä, että on olemassa vakio $c=c(n,\alpha)>0$ s.e.

$$\int_E \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy \le c\,|E|^{\frac{\alpha}{n}}.$$

3. Oletetaan, että $E\subset\mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen joukko s.e. $0<|E|<\infty$, $0<\alpha<n$ ja $f\in L^1(E)$. Näytä, että on olemassa vakio $c=c(n,\alpha)>0$ s.e.

$$\int_E\int_E \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy\, dx \le c\,|E|^{\frac{\alpha}{n}}\int_E |f(y)|\, dy$$

(Opastus: Tehtävä 2.)

4. Todista, että on olemassa vakio $c = c(n) > 0$ s.e.

$$\int_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}| \, dy \le c r \int_{B(x,r)} |Du| \, dy$$

kaikilla $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ ja $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

(Opastus: Lemma 5.7 ja tehtävä 3.)

5. Oletetaan, että $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ja $|Du| \in L^n(\mathbb{R}^n)$. Näytä, että on olemassa vakio $c = c(n) > 0$ s.e.

$$⨍_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}| \, dy \le c \, \|Du\|_n$$

kaikilla $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$. (Opastus: Poincarén epäyhtälö.)

6. Oletetaan, että $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$. Todista, että

$$\left(⨍_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le 2 \inf_{a \in \mathbb{R}} \left(⨍_{B(x,r)} |f - a|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$