Analyysi I

1. harjoitus

1. Jos $A_1 \subset A_2 \subset \mathbb{R}^n$ ovat Lebesgue-mitallisia joukkoja ja $|A_1| < \infty$, niin todista että

$$|A_2 \setminus A_1| = |A_2| - |A_1|.$$

2. Todista, että $A \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen jos ja vain jos

$$|E \cup F| = |E| + |F|$$

jokaiselle $E \subset A$ ja $F \subset \mathbb{R}^n \setminus A$.

3. Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on sellainen joukko että $|\partial A| = 0$, niin näytä että A on Lebesgue-mitallinen. Anna esimerkki Lebesgue-mitallisesta joukosta A, jolle pätee $|\partial A| > 0$.

4. Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen joukko ja $|A| = \infty$. Näytä, että jokaiselle λ, $0 \le \lambda < \infty$, on olemassa Lebesgue-mitallinen joukko $A_\lambda \subset A$, jolle pätee $|A_\lambda| = \lambda$.

5. Olkoon

$$A = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0 \}.$$

Näytä, että $|A| = 0$.

6. Oletetaan, että $E \subset \mathbb{R}^n$ on nollamittainen joukko. Näytä, että $\mathbb{R}^n \setminus E$ on tiheä $\mathbb{R}^n$:n osajoukko.

7. Näytä että Lebesguen mitan määritelmässä olevat suljetut välit voidaan korvata avoimilla väleillä.