

Olkoon nyt μ σ -äärellinen.

Ota $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$: $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, $\mu(E_j) < \infty$.

$$A_k := \bigcup_{j=1}^k E_j.$$

Määr. $\psi_k: L^p(\mu_{A_k}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_k(f) := \psi(f \cdot \chi_{A_k})$.

Nyt ψ_k lineaarinen. $\|\psi_k\| \leq \|\psi\|$, koska

$$|\psi_k(f)| = |\psi(f \cdot \chi_{A_k})| \leq \|\psi\| \underbrace{\|f \chi_{A_k}\|_{L^p(\mu)}}_{= \|f\|_{L^p(\mu_{A_k})}}.$$

$\mu(A_k) < \infty$,
ed. kohta $\Rightarrow \exists! g_k \in L^q(\mu_{A_k}) \forall f \in L^p(\mu_{A_k})$: $\|g_k\|_{L^q(\mu_{A_k})} \leq \|\psi\|$,
 $\psi_k(f) = \int f g_k d\mu_{A_k}$ ($g_k = \frac{d\psi_{A_k}}{d\mu_{A_k}}$, $\nu_{A_k}(E) := \mu(E \cap A_k)$).

Koska $g_k(x) = g_l(x)$ μ -m.k. $x \in A_k \cap A_l$,

voidaan määritellä $\mathcal{M}$ -mitallinen $g: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ s.e.

$$g(x) := g_k(x) \quad \mu\text{-m.k. } x \in A_k.$$

$$g \in L^q(\mu):$$

$$q = \infty \Rightarrow \|g\|_{L^\infty(\mu)} \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}^+} \|g_k\|_{L^\infty(\mu_{A_k})} \leq \|\psi\|,$$

$$q < \infty \Rightarrow \|g\|_{L^q(\mu)}^q = \int |g|^q d\mu \stackrel{\text{mon. konv.}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{A_k} |g_k|^q d\mu}_{= \|g_k\|_{L^q(\mu_{A_k})}^q} \leq \|\psi\|^q.$$

Kun $f \in L^p(\mu)$, saadaan

$$\underbrace{\psi(f \cdot \chi_{A_k})}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \psi(f)} = \psi_k(f) = \int f g_k \chi_{A_k} d\mu = \underbrace{\int f \chi_{A_k} \cdot g d\mu}_{\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{dom. konv.}} \int f g d\mu}$$

koska $\psi: L^p(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva ja

$$f \cdot \chi_{A_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{L^p(\mu)} f, \quad (p < \infty)$$

□ (σ -äärellinen tapaus).

Olkoon nyt $1 < p < \infty$, μ ei- σ -äärellinen

Jos μ_E on σ -äärellinen, niin edellisen nojalla

$$\exists! g_E \in L^q(\mu_E) \quad \forall f \in L^p(\mu_E): \quad \psi(f) = \int f g_E d\mu_E.$$

Sovitaan, että $g_E|_{X \setminus E} \equiv 0$. Päteekin myös $\|g_E\|_{L^q(\mu)} \leq \|\psi\|$.

Olkoon

$$M := \sup \{ \|g_E\|_{L^q(\mu)} : E \in \mathcal{M}, \mu_E \text{ } \sigma\text{-äärellinen} \}.$$

Nyt $M \leq \|\psi\| < \infty$.

Ota $\{E_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ s.e. μ_{E_j} σ -äärellinen ja

$$\|g_{E_j}\|_{L^q(\mu)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} M.$$

Olkoon

$$F := \bigcup_{j=1}^\infty E_j.$$

Nyt $F \in \mathcal{M}$, μ_F σ -äärellinen, joten

$$M \geq \|g_F\|_{L^q(\mu)} \stackrel{F \supset E_j}{\geq} \|g_{E_j}\|_{L^q(\mu)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} M$$

$$\Rightarrow \|g_F\|_{L^q(\mu)} = M.$$

Jos $f \in L^p(\mu)$, niin $F \cup \{f \neq 0\} \in \mathcal{M}$,

$\mu_{F \cup \{f \neq 0\}}$ on σ -äärellinen. Lisäksi

$$g_F = g_{F \cup \{f \neq 0\}} \quad \mu\text{-m.k.}, \quad \text{sillä}$$

$$(\text{huom. } q < \infty) \quad \underbrace{\|g_{F \cup \{f \neq 0\}}\|_{L^q}^q}_{=M^q} = \underbrace{\|g_F\|_{L^q}^q}_{=M^q} + \|g_{(F \cup \{f \neq 0\}) \setminus F}\|_{L^q}^q.$$

$$\Rightarrow \psi(f) = \psi(f \cdot \chi_{F \cup \{f \neq 0\}})$$

$$= \int f g_{F \cup \{f \neq 0\}} d\mu = \int f \underbrace{g_F}_{=g \in L^q(\mu)} d\mu$$

$$\text{Siis } \forall f \in L^p(\mu): \quad \psi(f) = \int f g d\mu. \quad \blacksquare$$

$\|g\|_{L^q} \leq \|\psi\|$.
(Huom. F ei riipa f :n valinnasta.)

Huom.

Edellä osa todistuksista oli varsin teknisiä. Olennaiset ideat näkyvät parhaimmin seuraavista erikoistapauksista:

- $\mathbb{R}$ -arvoiset "merkilliset mitat" ($\nu: M \rightarrow \mathbb{R}$,
ei $M \rightarrow [-\infty, \infty]$).
- Radon-Nikodym -derivaatta $\frac{d\nu}{d\mu}$, kun
 $\nu \leq \mu$, μ äärellinen mitta.
- Duaali $L^p(\mu)'$, kun μ äärellinen mitta.

Huom.

Edellä ei tarkasteltu duaalia $L^\infty(\mu)'$!

Sille on olemassa "eksoottisempi" esityskaava, joka muistuttaa käsittelemämme tapauksia $L^p(\mu)'$.

Kuitenkin usein $L^\infty(\mu)' \neq L^1(\mu)$.

6.8 Tulomitta

Olkoot $(X, \mathcal{M}_\mu, \mu)$

$(Y, \mathcal{M}_\nu, \nu)$

mitta-araruuksia.

Tulomitan $\mu \times \nu$ mitta-araruus

$(X \times Y, \mathcal{M}_{\mu \times \nu}, \mu \times \nu)$

määritellään seuraavasti:

Olkoon

$$\mathcal{A} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{M}_\mu, B \in \mathcal{M}_\nu\},$$

"Mitake" (ks. s. 1-3)

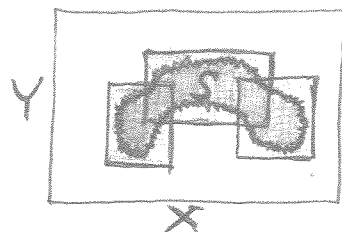
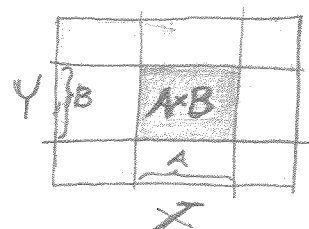
$$m: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty],$$

$$m(A \times B) := \mu(A) \nu(B),$$

synnyttää tulomitan

$$m^*: \mathcal{P}(X \times Y) \rightarrow [0, \infty],$$

$$m^*(S) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j \times B_j) \mid S \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j, \right. \\ \left. A_j \times B_j \in \mathcal{A} \right\}.$$



Olkoon

$$\mathcal{M}_{\mu \times \nu} := \mathcal{M}(m^*) \quad (m^*\text{-mitalliset joukot}),$$

$$\mu \times \nu = m^*|_{\mathcal{M}(m^*)}.$$

Esim.

$$\lambda_{\mathbb{R}^m} \times \lambda_{\mathbb{R}^n} = \lambda_{\mathbb{R}^{m+n}} \quad [\text{GZ 6.9}].$$

Mahtaisiko joskus päteä

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f \, d\nu \, d\mu \quad ?$$

$$(\quad = \int_Y \int_X f \, d\mu \, d\nu \quad ?)$$

Tutkitaan tätä seuraavassa.

Huom.

Havaitaan, että

$$m^*(S) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j \times B_j) \mid S \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{A_j \times B_j}_{\in \mathcal{A}} \right\}$$

$$= \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j \times B_j) \mid S \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{A_j \times B_j}_{\in \mathcal{A}}, \right.$$

$$\left. j \neq k \Rightarrow (A_j \times B_j) \cap (A_k \times B_k) = \emptyset \right\}$$

(pistevieraat!)

Sillä (ks. kuva alla)

$$(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$$

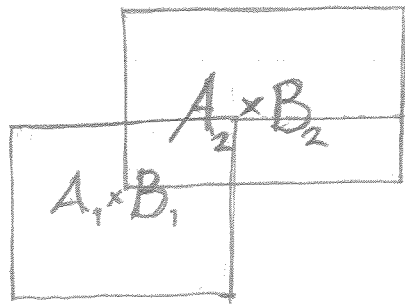
$$= (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times (B_2 \setminus B_1)) \cup ((A_2 \setminus A_1) \times (B_1 \cap B_2))$$

ja

$$m(A_1 \times B_1) + m(A_2 \times B_2)$$

$$\geq m(A_1 \times B_1) + m(A_2 \times (B_2 \setminus B_1)) + m((A_2 \setminus A_1) \times (B_1 \cap B_2))$$

ja niin edelleen.



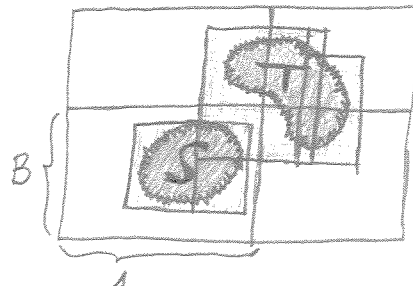
Propositio

Olkoot $A \in \mathcal{M}_\mu$, $B \in \mathcal{M}_\nu$.

Silloin $A \times B \in \mathcal{M}_{\mu \times \nu}$ ja
 $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \vee \nu(B)$.

Tod.

Ota $S \subset A \times B$, $T \subset (A \times B)^c$,
 joille $m^*(S) < \infty$, $m^*(T) < \infty$;



$A \times B \in \mathcal{M}(m^*) = \mathcal{M}_{\mu \times \nu}$, jos voidaan

osoittaa, että $m^*(S \cup T) \geq m^*(S) + m^*(T)$.

Ota $\varepsilon > 0$.

Ota erilliset $A_j \times B_j \in \mathcal{A}$ ($j \in \mathbb{Z}^+$), joille

$$\begin{cases} S \cup T \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j, \\ m^*(S \cup T) + \varepsilon > \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j \times B_j). \end{cases}$$

Olkoon

$$S_j := (A \times B) \cap (A_j \times B_j) \in \mathcal{A},$$

$$T_j := (A \times (Y \setminus B)) \cap (A_j \times B_j) \in \mathcal{A},$$

$$U_j := ((X \setminus A) \times B) \cap (A_j \times B_j) \in \mathcal{A}.$$

Nyt $S_j, T_j, U_j \in \mathcal{A}$ erilliset ($j \in \mathbb{Z}^+$), $A_j \times B_j = S_j \cup T_j \cup U_j$,

$$m^*(S \cup T) + \varepsilon > \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{m(A_j \times B_j)}_{= m(S_j) + m(T_j) + m(U_j)}$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} m(S_j)}_{\geq m^*(S)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (m(T_k) + m(U_k))}_{\geq m^*(T)}$$

$$\Rightarrow A \times B \in \mathcal{M}_{\mu \times \nu}. \quad \square \quad \begin{array}{l} \uparrow S \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \\ \uparrow T \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (T_k \cup U_k) \end{array}$$

Nyt $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \nu(B)$, koska

$$\begin{aligned}
 m^*(A \times B) &\stackrel{\text{triv.}}{\leq} m(A \times B) \\
 &= \mu(A) \nu(B) \\
 &= \int_X \int_Y \chi_{A \times B} \, d\nu \, d\mu \\
 &\leq \int_X \int_Y \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j \times B_j} \, d\nu \, d\mu \quad \left\| \begin{array}{l} \text{Olkoon} \\ A \times B = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{A_j \times B_j}_{\subset A} \end{array} \right. \\
 &\stackrel{\text{mon.konv.}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j \times B_j). \quad \square
 \end{aligned}$$

Nyt tiedetään, että

$$\Sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_{\mu \times \nu},$$

missä $\Sigma(\mathcal{A})$ on perheen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ virittämä σ -algebra.

Lemma

Olkoot μ, ν äärellisiä,
 $S \subset X \times Y$.

Silloin on olemassa $R \in \Sigma(\mathcal{A})$, jolle
 $S \subset R$,

$$\begin{aligned}
 m^*(S) &= m^*(R) \\
 &= \int_X \int_Y \chi_R \, d\nu \, d\mu \\
 &\quad \underbrace{= (x \mapsto \nu(R^x))}_{\text{\(\mu\)-mitallinen, missä}} \\
 R^x &:= \{y : (x, y) \in R\} \\
 &\in \mathcal{M}_{\nu} \quad \mu\text{-m.k. } x \in X.
 \end{aligned}$$

(Erityisesti m^* on $\Sigma(\mathcal{A})$ -säännöllinen).

Tod.

Ota $\varepsilon > 0$.

Ota erilliset $A_{\varepsilon j} \times B_{\varepsilon j} \in \mathcal{A}$ ($j \in \mathbb{Z}^+$), joille

$$S \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{\varepsilon j} \times B_{\varepsilon j}$$

$$=: R_{\varepsilon} \in \Sigma(\mathcal{A}) \quad \text{ja}$$

$$m^*(S) + \varepsilon > \sum_{j=1}^{\infty} m(A_{\varepsilon j} \times B_{\varepsilon j}).$$

$$= \underbrace{\int_X \int_Y \chi_{R_{\varepsilon}} d\nu d\mu}_{\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} m^*(S)} \geq \underbrace{\int_X \int_Y \chi_{\bigcap_{k=1}^{\infty} R_{\nu_k}} d\nu d\mu}_{\geq m^*(S)}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} m^*(S) \quad \begin{array}{c} \text{dom. konv.} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \end{array} \underbrace{\int_X \int_Y \chi_{\bigcap_{k=1}^n R_{\nu_k}} d\nu d\mu}_{\geq m^*(S)}$$

↑
Ok, koska
 μ, ν äärellisiä

Olkoon
 $R := \bigcap_{k=1}^{\infty} R_{\nu_k}. \quad \square$

Lause

Olko μ, ν σ -äärellisiä täydellisiä,
 $S \in \mathcal{M}_{\mu \times \nu}$.

Silloin

$$(\mu \times \nu)(S) = \int_X \int_Y \chi_S d\nu d\mu$$

$= (x \mapsto \nu(S^x))$ μ -mitallinen, missä

$$S^x := \{y : (x, y) \in S\}$$

$\in \mathcal{M}_{\nu}$ μ -m.h. $x \in X$.

Tod.

- (1) Olkoot μ, ν aluksi äärellisiä ja täydellisiä.
 Edellinen lemma antaa joukon $R \in \Sigma(\mathcal{A})$, jolle $S \in \mathcal{R}$
 ja $(\mu \times \nu)(S) = m^*(S) = m^*(R) \stackrel{cM_{\mu \times \nu}}{=}$
 $= \int_X \int_Y \chi_R d\nu d\mu$
 $(x \mapsto \nu(R^x))$.

Tulos seuraa, jos voidaan osoittaa, että
 $\nu(R^x) = \nu(S^x) \quad \mu\text{-m.k. } x \in X$.

Nyt $R^x = S^x \cup (R \setminus S)^x$
 $\in \mathcal{M}_{\mu \times \nu}^\oplus$, koska $R, S \in \mathcal{M}_{\mu \times \nu}$.

Edellisen lemmän nojalla on olemassa $Q \in \Sigma(\mathcal{A})$,
 jolle $R \setminus S \subset Q$ ja

$$\underbrace{m^*(R \setminus S)}_{\stackrel{\oplus}{=} m^*(R) - m^*(S)} = \underbrace{\int_X \int_Y \chi_Q d\nu d\mu}_{(x \mapsto \nu(Q^x))}$$

$\stackrel{\mu, \nu \text{ äärellisiä}}{=} 0$.

$$\Rightarrow \nu(Q^x) = 0 \quad \mu\text{-m.k. } x \in X.$$

Koska $R \setminus S \subset Q$ ja ν on täydellinen, saadaan

$$\begin{cases} (R \setminus S)^x \in \mathcal{M}_\nu & \mu\text{-m.k. } x \in X, \\ \nu((R \setminus S)^x) = 0 & \text{--- " ---}, \end{cases} \text{ joten}$$

$$\nu(R^x) = \nu(S^x) \quad \text{--- " ---} \quad \square (1)$$

(2) Olkoot μ, ν σ -äärellisiä ja täydellisiä.

Ota $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}_\mu$ pistevieras s.e.

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \quad \mu(A_j) < \infty.$$

Ota $\{B_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}_\nu$ pistevieras s.e.

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k, \quad \nu(B_k) < \infty.$$

Silloin $\{A_j \times B_k\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}_{\mu \times \nu}$ on pistevieras s.e.

$$X \times Y = \bigcup_{j,k=1}^{\infty} A_j \times B_k, \quad (\mu \times \nu)(A_j \times B_k) < \infty.$$

Kun $S \in \mathcal{M}_{\mu \times \nu}$, saadaan

$$\begin{aligned} (\mu \times \nu)(S) &= (\mu \times \nu)\left(S \cap \bigcup_{j,k=1}^{\infty} (A_j \times B_k)\right) \\ &= \sum_{j,k=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(S \cap (A_j \times B_k)) \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_{j,k=1}^{\infty} \int_X \int_Y \chi_{S \cap (A_j \times B_k)} d\nu d\mu \\ &\stackrel{\text{mon. konv.}}{=} \int_X \int_Y \chi_S d\nu d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

Seuraus 6.47 (Fubini & Tonelli)

Olkoot μ, ν σ -äärellisiä täydellisiä,
 $f \geq 0$ $\mathcal{M}_{\mu \times \nu}$ -mitallinen.

Silloin

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) &= \int_X \int_Y f d\nu d\mu \\ &= \int_Y \int_X f d\mu d\nu \end{aligned}$$

(ja $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ $\mathcal{M}_\nu$ -mitallinen μ -m.k. $x \in X$,
 $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ $\mathcal{M}_\mu$ -mitallinen jne.) $\square$ (Tehtävä).