

Tod. (Lemma 6.36)

Olkoon $E \in \mathcal{P}$. Silloin

$$\begin{aligned} \int_E h_{\mathcal{P}} d\mu &= \int_E \sum_{A \in \mathcal{P}} \frac{\nu(A)}{\mu(A)} \chi_A d\mu \\ &= \sum_{A \in \mathcal{P}} \frac{\nu(A)}{\mu(A)} \int \chi_{A \cap E} d\mu \\ &\stackrel{\substack{E \in \mathcal{P}, \\ \mathcal{P} \text{ kienonitus}}}{=} \sum_{\substack{A \in \mathcal{P} \\ A \subseteq E}} \frac{\nu(A)}{\mu(A)} \mu(A) \\ &\stackrel{\text{samoja}}{=} \nu(E), \quad \textcircled{*} \end{aligned}$$

erikoistapauksena $\int_E h_{\mathcal{P}} d\mu = \nu(E)$. $\square$

$$\begin{aligned} \|h_{\mathcal{P}}\|_{L^2(\mu_E)}^2 &\stackrel{\text{triv.}}{\leq} \|h_{\mathcal{P}}\|_{L^2(\mu_E)}^2 + \|h_{\mathcal{P}'} - h_{\mathcal{P}}\|_{L^2(\mu_E)}^2 \\ &= \int_E h_{\mathcal{P}}^2 d\mu + \int_E (h_{\mathcal{P}'} - h_{\mathcal{P}})^2 d\mu \\ &= \underbrace{\int_E h_{\mathcal{P}}^2 d\mu}_{=\|h_{\mathcal{P}}\|_{L^2(\mu_E)}^2} + 2 \underbrace{\int_E h_{\mathcal{P}}(h_{\mathcal{P}'} - h_{\mathcal{P}}) d\mu}_{\substack{E \in \mathcal{P} \\ = \int_E \frac{\nu(E)}{\mu(E)} \left(\frac{\nu(E)}{\mu(E)} - h_{\mathcal{P}'} \right) d\mu}} \\ &\quad \stackrel{\textcircled{*}}{=} \frac{\nu(E)}{\mu(E)} \left(\frac{\nu(E)}{\mu(E)} \mu(E) - \nu(E) \right) \\ &= 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lause 6.37 (Radon-Nikodym-lauseen erikoistapaus)

Olkoon $\nu \leq \mu$ mitta, $\mu(X) < \infty$.

Silloin $\exists \frac{d\nu}{d\mu}$ eli

$$\nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu \quad (\forall E \in \mathcal{M}).$$

Lisäksi

$$\int g^+ d\nu = \int g^+ \frac{d\nu}{d\mu} d\mu,$$

kun $g^+ \geq 0$ on $\mathcal{M}$ -mitallinen.

(78.)

Tod. [Idea: $h_P \xrightarrow{L^2} \frac{d\mu}{d\mu}$]

Olkoon

$$M := \sup \{ \|h_P\|_{L^2(\mu)}^2 \mid P \text{ on } X \text{ in äärellinen ositus} \}.$$

Nyt $M < \infty$, koska

$$\|h_P\|_{L^2(\mu)}^2 = \int \underbrace{h_P^2}_{\leq 1} d\mu \leq \mu(X) < \infty.$$

Olkoot P_k X in äärellisiä $\mathcal{M}$ -osituksia, joille

$$\|h_{P_k}\|_{L^2(\mu)}^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M.$$

Olkoon P_k ositusten $P_1, P_2, \dots, P_k \quad \}^{\otimes}$
yhteinen hienonnus,

$$f_k := h_{P_k}.$$

Näytetään, että $f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{L^2(\mu)} f = \frac{d\mu}{d\mu}.$

Nyt $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(\mu)$ on Cauchy-jono, sillä

$$\|f_j - f_k\|_{L^2(\mu)}^2 \stackrel{\text{Lemma 6.36}}{=} \left| \underbrace{\|f_j\|_{L^2(\mu)}^2}_{\xrightarrow{j \rightarrow \infty} M} - \underbrace{\|f_k\|_{L^2(\mu)}^2}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} M} \right|$$

koska $M \geq \|f_k\|_{L^2(\mu)}^2 \quad \parallel \text{Lemma 6.36}$

$$\stackrel{\otimes}{\geq} \|h_{P_k}\|_{L^2(\mu)}^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M$$

$$\Rightarrow \|f_j - f_k\|_{L^2(\mu)} \xrightarrow{j, k \rightarrow \infty} 0.$$

Koska $L^2(\mu)$ on Banach-avaruus,
on olemassa $f \in L^2(\mu)$, jolle

$$\|f - f_k\|_{L^2(\mu)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

...

Osoitetaan, että $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ eli

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \quad (\forall E \in \mathcal{M}).$$

Ota $E \in \mathcal{M}$.

Olkoon $\mathcal{L}_k$ ositusten $\mathcal{P}_k'$ & $\{E, X \cdot E\}$ yhteinen hienonnus,

$$h_k := h_{\mathcal{L}_k}.$$

Silloin

$$\nu(E) \stackrel{\text{Lemma 6.36}}{=} \int_E h_k d\mu$$

$$= \underbrace{\int_E (h_k - f_k) d\mu}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{\int_E f_k d\mu}_{\substack{\text{Vitali \& mon. konv.} \\ \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_E f d\mu}}.$$

koska

$$\left| \int_E (h_k - f_k) d\mu \right| \leq \int_E |h_k - f_k| d\mu$$

$$\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_E |h_k - f_k|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_E d\mu \right)^{1/2}$$

$$= \underbrace{\|h_k - f_k\|_{L^2(\mu_E)}^2}_{\substack{\text{Lemma 6.36} \\ = \|h_k\|_{L^2(\mu_E)}^2 - \|f_k\|_{L^2(\mu_E)}^2}} \cdot \underbrace{\mu(E)^{1/2}}_{< \mu(X)^{1/2} < \infty}$$

$$\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\substack{\rightarrow M \\ \rightarrow M}} \cdot \square \left(f = \frac{d\nu}{d\mu} \right).$$

Olkoon $g^+ \geq 0$ μ -mitallinen.

Ota yksinkertaiset μ -mitalliset s_k , joille

$$0 \leq s_k(x) \leq s_{k+1}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g^+(x).$$

$$\int g^+ d\nu = \int \lim_{k \rightarrow \infty} s_k d\nu \stackrel{\text{mon. konv.}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int s_k d\nu$$

$$\stackrel{(*)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int s_k \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$$

$$\stackrel{\text{mon. konv.}}{=} \int \lim_{k \rightarrow \infty} s_k \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int g^+ \frac{d\nu}{d\mu} d\mu. \quad \blacksquare$$

(*) $\circ$: s_k yksinkert. μ -mit. ja

$$\underbrace{\int \chi_E d\nu}_{= \nu(E)} = \int \chi_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

Tod. (Lause 6.38 (Radon-Nikodym), ks. s. 75.)

(80)

Lause 6.37 (s. 77) oli Radon-Nikodym, kun
" $\nu \ll \mu$ mitta & μ äärellinen"

Todistus etenee osissa (1, 2, 3):

(1) " $\nu \ll \mu$ & ν, μ äärellisiä mittoja".

(2) " $\nu \ll \mu$ & ν, μ σ -äärellisiä mittoja".

(3) " $\nu \ll \mu$ & ν 'merkittävä' & μ σ -äärellinen".

Osat (2 & 3) jätetään tehtäväksi, todistetaan osa (1):

Nyt

$$\mu \leq \mu + \nu \quad \& \quad \nu \leq \mu + \nu$$

$$\xrightarrow{\text{Lause 6.37}} \exists \frac{d\mu}{d(\mu+\nu)} \quad \& \quad \exists \frac{d\nu}{d(\mu+\nu)}.$$

Olkoon $A := \left\{ \frac{d\mu}{d(\mu+\nu)} > 0 \right\} \in \mathcal{M}$.

Määritellään (μ -mitallinen) $f: X \rightarrow [0, \infty]$ s.e.

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\frac{d\nu}{d(\mu+\nu)}(x)}{\frac{d\mu}{d(\mu+\nu)}(x)}, & \text{kun } x \in A, \\ 0, & \text{kun } x \in A^c. \end{cases}$$

Näytetään, että $f = \frac{d\nu}{d\mu}$: Ota $E \in \mathcal{M}$. Nyt

$$\nu(E) = \nu(A \cap E) + \underbrace{\nu(A^c \cap E)}_{=0, \text{ koska } \nu \ll \mu \text{ ja koska } \mu(A^c) = \int \chi_{A^c} d\mu \stackrel{6.37}{=} \int \chi_{A^c} \cdot \underbrace{\frac{d\mu}{d(\mu+\nu)}}_{\equiv 0} d(\mu+\nu) = 0. \otimes}$$

$$= \nu(A \cap E)$$

$$= \int_{A \cap E} d\nu \stackrel{6.37}{=} \int_{A \cap E} \frac{d\nu}{d(\mu+\nu)} d(\mu+\nu)$$

$$= \int_{A \cap E} f \cdot \frac{d\mu}{d(\mu+\nu)} d(\mu+\nu)$$

$$\stackrel{6.37}{=} \int_{A \cap E} f d\mu$$

$$\stackrel{\otimes}{=} \int_E f d\mu. \blacksquare$$

Lause 6.39 (Lebesgue-hajoitelma)

Olkoot $\mu, \nu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ σ -äärellisiä mittoja.

Silloin on olemassa yksikäsitteiset mitat

$$\nu_0, \nu_1: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty], \quad \text{joille}$$

$$\nu = \nu_0 + \nu_1 \quad \text{ja} \quad \begin{cases} \nu_0 \perp \mu, \\ \nu_1 \ll \mu. \end{cases}$$

Tod.

Olkoon $A := \left\{ \frac{d\mu}{d(\mu+\nu)} > 0 \right\} \in \mathcal{M}$. Määr. ν_0, ν_1 s.e.

$$\nu(E) = \underbrace{\nu(A^c \cap E)}_{=: \nu_0(E)} + \underbrace{\nu(A \cap E)}_{=: \nu_1(E)}.$$

Nyt $\nu_0 \perp \mu$, koska

$$\begin{cases} \nu_0(A) = \nu(A^c \cap A) = \nu(\emptyset) = 0, \\ \mu(A^c) = \int \chi_{A^c} d\mu \stackrel{\text{Radon-Nikodym}}{=} \int \underbrace{\chi_{A^c} \cdot \frac{d\mu}{d(\mu+\nu)}}_{\equiv 0} d(\mu+\nu) = 0. \end{cases} \quad \square$$

Osoitetaan, että $\nu_1 \ll \mu$:

Ota $E \in \mathcal{M}$, jolle $\mu(E) = 0$.

Silloin $\nu_1(E) = 0$, koska

$$\begin{aligned} 0 &\leq \nu_1(E) = \nu(A \cap E) \\ &\leq (\mu + \nu)(A \cap E) \quad \parallel \quad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_k := \left\{ \frac{d\mu}{d(\mu+\nu)} \geq \frac{1}{k} \right\}, \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu + \nu)(A_k \cap E) \quad A_k \subset A_{k+1} \in \mathcal{M}. \\ &= \int_{A_k \cap E} d(\mu + \nu) \\ &\leq \int_{A_k \cap E} k \cdot \frac{d\mu}{d(\mu+\nu)} d(\mu + \nu) \\ &\stackrel{\text{Radon-Nikodym}}{=} k \cdot \mu(A_k \cap E) \leq k \cdot \mu(E) = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Lebesgue-hajoitelman yksikäsitteisyyden osoittaminen jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

6.7 L^p :in duaali

$\mathbb{R}$ -Banach-avaruuden V duaali

$$V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$$

$$= \{ \psi: V \rightarrow \mathbb{R} \mid \psi \text{ rajoitettu lineaarinen} \}$$

on $\mathbb{R}$ -Banach-avaruus normilla

$$\psi \mapsto \|\psi\| := \sup_{v \in V: \|v\|_V \leq 1} |\psi(v)|.$$

Annetun "konkreettisen" Banach-avaruuden duaalille halutaan "käyttökelpoinen" esitys.

Seuraavassa $V = L^p(\mu)$, kun $1 \leq p \leq \infty$,
 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mitta-avaruus.

Lemma

Olkoon $q = p'$ (eli $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, missä $\frac{1}{\infty} \stackrel{\text{sovimus}}{=} 0$).

Olkoon $g \in L^q(\mu)$.

Silloin $\varphi_g \in L^p(\mu)'$, missä

$$\varphi_g(f) := \int f g \, d\mu.$$

Lisäksi jos

(a) $p=1$ & μ σ -äärellinen tai

(b) $1 < p \leq \infty$,

niin

$$\|\varphi_g\| = \|g\|_{L^q(\mu)}.$$

Tod.

Tehtävä. $\square$

Lause 6.43 (L^p :n duaali)

Olkoon (a) $p=1$ & μ σ -äärellinen
tai (b) $1 < p < \infty$.

Silloin kuvaus $(g \mapsto \varphi_g) : L^q(\mu) \rightarrow L^p(\mu)'$

$$(g \mapsto \varphi_g) : L^q(\mu) \rightarrow L^p(\mu)'$$

on isometrinen isomorfismi (eli $L^p(\mu)' \cong L^q(\mu)$).

Tod.

(eli $\|g\|_q = \|\varphi_g\|$)

Edellisen lemmän nojalla riittää osoittaa, että $\psi \in L^p(\mu)'$ on muotoa $\psi = \varphi_g$ jollakin $g \in L^q(\mu)$.

Olkoon aluksi $\mu(X) < \infty$.

[Idea seuraavassa:

$$\psi(f) = \int f \frac{d\nu}{d\mu} d\mu, \quad \text{missä}$$

$$\nu(E) := \psi(\chi_E), \quad \frac{d\nu}{d\mu} \in L^q(\mu)]$$

Ota $\psi \in L^p(\mu)'$.

Määritellään $\nu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ s.e.

$$\nu(E) := \psi(\underbrace{\chi_E}_{\in L^p(\mu)}), \quad \text{koska } \mu(X) < \infty.$$

ν on "merkittöinen mitta":

$$\nu(\emptyset) = \psi(\underbrace{\chi_\emptyset}_{\equiv 0}) \stackrel{\psi \text{ lineaarinen}}{=} 0;$$

$$\nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j) \quad \text{erillisille } E_j \in \mathcal{M}, \text{ sillä}$$

$$|\nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) - \sum_{j=1}^k \nu(E_j)| = |\psi(\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j}) - \sum_{j=1}^k \psi(\chi_{E_j})|$$

$$= |\psi(\sum_{j=k+1}^{\infty} \chi_{E_j})| \quad (\text{koska } \psi \text{ lineaarinen ja } E_j \text{ erillisiä})$$

$$\stackrel{\psi \text{ raj.}}{\leq} \|\psi\| \sum_{j=k+1}^{\infty} \|\chi_{E_j}\|_{L^p(\mu)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mu(X) < \infty} 0, \quad \text{koska } E_j \text{ erillisiä.}$$

Nyt $\nu \ll \mu$, koska jos $\mu(E) = 0$, niin

$$\nu(E) = \psi(\chi_E) \stackrel{\psi \text{ lin.}}{=} 0$$

$\stackrel{L^p}{\approx} 0$, koska $\|\chi_E\|_{L^p(\mu)} = \mu(E)^{1/p} = 0$.

Radon-Nikodym

$$\Rightarrow \exists \frac{d\nu}{d\mu}.$$

$$[\nu(\mathcal{M}) = \mathbb{R} \stackrel{\text{Prop. (5.73)}}{\Rightarrow} \frac{d\nu}{d\mu} \in L^1(\mu).]$$

On osoitettava, että $\frac{d\nu}{d\mu} \in L^q(\mu)$ ja että

$$\forall f \in L^p(\mu): \psi(f) = \int f \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

Ainakin

$$\psi(\chi_E) = \nu(E) \stackrel{\text{Radon-Nikodym}}{=} \int \chi_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu. \quad (*)$$

Jos $s = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{E_j}$ on μ -mitallinen, niin

$$\begin{aligned} \psi(s) &\stackrel{\psi \text{ lin.}}{=} \sum_{j=1}^k a_j \psi(\chi_{E_j}) \\ &= \sum_{j=1}^k a_j \nu(E_j) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^k a_j \int \chi_{E_j} \frac{d\nu}{d\mu} d\mu \\ &= \int s \frac{d\nu}{d\mu} d\mu, \end{aligned}$$

Siiis

$$\psi(s) = \int s \frac{d\nu}{d\mu} d\mu \quad (**)$$

yksinkertaiselle μ -mitalliselle $s: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Todistetaan seuraavaksi, että

$$\frac{d\nu}{d\mu} \in L^q(\mu).$$

Olkoon $p=1$ ($\Rightarrow q=\infty$).

Seuraavassa nähdään, että $\|\frac{dv}{d\mu}\|_{L^q} \leq \|\psi\|$:

Ota $M > \|\psi\|$. Silloin

$$\begin{aligned}
 M \cdot \mu(\underbrace{\{|\frac{dv}{d\mu}| > M\}}_{=: A_M}) &= \int_{A_M} M d\mu \\
 &\leq \int_{A_M} |\frac{dv}{d\mu}| d\mu \quad \swarrow \text{sgn}(h)(x) := \begin{cases} +1, & \text{kun } h(x) > 0, \\ 0, & \text{kun } h(x) = 0, \\ -1, & \text{kun } h(x) < 0. \end{cases} \\
 &= \int \underbrace{\chi_{A_M} \text{sgn}(\frac{dv}{d\mu})}_{\substack{\text{yksinkertainen} \\ \mu\text{-mitallinen}}} \frac{dv}{d\mu} d\mu \\
 &\stackrel{\text{ks. ed. s. } \oplus}{=} \psi(\chi_{A_M} \text{sgn}(\frac{dv}{d\mu})) \\
 &\leq \|\psi\| \underbrace{\|\chi_{A_M} \text{sgn}(\frac{dv}{d\mu})\|_{L^p(\mu)}}_{\substack{p=1 \\ \leq \mu(A_M)}}
 \end{aligned}$$

[eli $M \cdot \mu(A_M) \leq \|\psi\| \mu(A_M)$

$\xRightarrow{M > \|\psi\|} \mu(A_M) = 0$, joten $\|\frac{dv}{d\mu}\|_{L^\infty(\mu)} \leq \|\psi\|$.] $\square$

Olkoon $1 < p < \infty$ ($\Rightarrow \infty > q > 1$).

Ota $h_k: X \rightarrow \mathbb{R}$ μ -mitalliset yksinkertaiset, joille

$$0 \leq h_k(x) \leq h_{k+1}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |\frac{dv}{d\mu}(x)|.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
 \|\frac{dv}{d\mu}\|_{L^q(\mu)}^q &= \int |\frac{dv}{d\mu}|^q d\mu \\
 &\stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\int h_k^q d\mu}_{= \|h_k\|_{L^q(\mu)}^q},
 \end{aligned}$$

joten $\frac{dv}{d\mu} \in L^q(\mu)$ seuraa, kun näytetään, että

$$\|h_k\|_{L^q(\mu)} \leq \text{vakio} < \infty.$$

$$\|h_n\|_{L^q}^q = \int h_n^q d\mu$$

$$\leq \int h_n^{q-1} \left| \frac{d\nu}{d\mu} \right| d\mu = \int \underbrace{h_n^{q-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)}_{\substack{\text{yksinkertainen} \\ \mathcal{M}\text{-mitallinen}}} \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$$

$$\stackrel{\text{s. 84} (*)}{=} \psi\left(h_n^{q-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)\right)$$

$$\leq \|\psi\| \|h_n^{q-1}\|_{L^p}$$

$$= \|h_n\|_{L^q}^{q/p}$$

$$\text{, sillä } p(q-1) \stackrel{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ eli } q+p=pq}{=} q$$

$$\Rightarrow \|h_n\|_{L^q}^{\frac{q}{q(1-1/p)}} \leq \|\psi\|. \quad \square$$

Ota $f \in L^p(\mu)$ (missä $1 \leq p < \infty, \mu(X) < \infty$). Näytetään, että

$$\psi(f) = \int f \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

Ota yksinkertaiset $\mathcal{M}$ -mitalliset f_n s.e. $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

$$\begin{aligned} |\psi(f) - \int f \frac{d\nu}{d\mu} d\mu| &= \|\psi(f_n) - \int f_n \frac{d\nu}{d\mu} d\mu\| \quad (\text{ks. s. 84}) \\ &= |\psi(f - f_n) + \int (f_n - f) \frac{d\nu}{d\mu} d\mu| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \underbrace{|\psi(f - f_n)|}_{\leq \|\psi\| \|f - f_n\|_{L^p(\mu)}} + \underbrace{\int |f_n - f| \left| \frac{d\nu}{d\mu} \right| d\mu}_{\substack{\text{Hölder} \\ \leq \|f_n - f\|_{L^p(\mu)} \|\frac{d\nu}{d\mu}\|_{L^q(\mu)}}} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

On näytetty, että $\frac{d\nu}{d\mu} \in L^q(\mu)$ ja

$$\psi(f) = \int f \frac{d\nu}{d\mu} d\mu \quad (\forall f \in L^p(\mu))$$

tapauksessa

$$\mu(X) < \infty, \quad 1 \leq p < \infty. \quad \square$$