

6.5 "Merkilliset mitat"

(engl. "signed measures", siis "etumerkilliset mitat".)

Seuraavassa $(X, \mathcal{M}, \mu)$ on mitta-avaruus.

Määr.

Kuvaus $\nu: \mathcal{M} \rightarrow [-\infty, \infty]$ on

"merkillinen mitta", jos

$$(1) \quad \nu(\emptyset) = 0 \quad \text{ja}$$

$$(2) \quad \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j),$$

kun $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ erilliset.

Esim.

Jos $\lambda: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty[$ on mitta,

niin $\lambda - \mu, \mu - \lambda: \mathcal{M} \rightarrow [-\infty, \infty]$ ovat

"merkillisiä mittoja"

[Jordan: muunlaisia ei ole ... (ks. s. 68)]

Huom. Sopimus: tilannetta " $\infty - \infty$ " ei sallita!

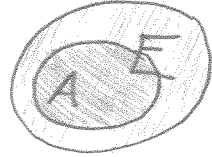
$$\text{Nyt } \nu(\mathcal{M}) \subset [-\infty, \infty[$$

$$\text{tai } \nu(\mathcal{M}) \subset]-\infty, \infty]$$

$$\text{jos nimittäin olisi } \begin{cases} \nu(A) = +\infty, \\ \nu(B) = -\infty, \end{cases}$$

niin

$$\nu(A \cup B) = \left\{ \begin{array}{l} \overset{= +\infty}{\nu(A)} + \nu((A \cup B) \setminus A) \\ \underset{= -\infty}{\nu(B)} + \nu((A \cup B) \setminus B) \end{array} \right\} = (?) \quad \downarrow$$

Huom.Jos $\nu(A) = \infty$ ja $A \subset E \in \mathcal{M}$,niin $\nu(E) = \underbrace{\nu(A)}_{=\infty} + \nu(E \setminus A) = \infty$.Määr.Olkoon $\nu: \mathcal{M} \rightarrow [-\infty, \infty]$ "merkillinen mitta".Kun $E \in \mathcal{M}$, asetetaan

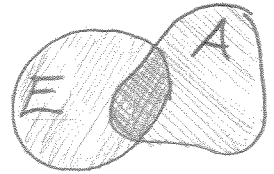
$$\nu^+(E) := \sup_{A \in \mathcal{M}} \nu(A \cap E),$$

$$\nu^-(E) := (-\nu)^+(E).$$

(ns. "positiivinen/negatiivinen variaatio").

Merk. $|\nu|(E) := \nu^+(E) + \nu^-(E)$

(ns. "totaalivariaatio").

Propositio $\nu^+, \nu^-: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ ovat mittoja.Tod.Tehtävä. $\square$ LemmaJos $\nu^+(E) = \infty$, niin $\nu(E) = \infty$.Tod.

$$\infty = \nu^+(E) = \sup_{A \in \mathcal{M}} \nu(A \cap E)$$

 $\Rightarrow$ ota $E_0 \in \mathcal{M}$: $E_0 \subset E$, $\nu(E_0) \geq 0$.Ota $A_0 \in \{E_0, E \setminus E_0\}$ s.e. $\nu^+(A_0) = \infty$.

(67.)

Oletetaan, että $E_k, A_k \in \mathcal{M}$
on valittu s.e. $\mu^+(A_k) = \infty$ ($k \in \mathbb{Z}^+$).

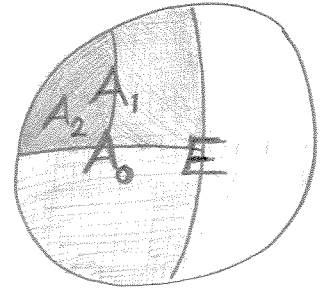
Ota $E_{k+1} \in \mathcal{M}$ s.e.

$$E_{k+1} \subset A_k,$$

$$\mu(E_{k+1}) \geq 1 + \mu(E_k) \quad (\geq k+1) \quad \otimes$$

Ota $A_{k+1} \in \{E_{k+1}, A_k \setminus E_{k+1}\}$ s.e.

$$\mu^+(A_{k+1}) = \infty.$$



Nyt pätee

joko (1) $\forall k_0 \exists k \geq k_0: A_{k+1} = A_k \setminus E_{k+1}$

tai (2) $\exists k_0 \forall k \geq k_0: A_{k+1} = E_{k+1}.$

(1): Nyt $\{E_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ erilliset

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{k_j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\mu(E_{k_j})}_{\geq k_j \geq 1} = \infty$$

$$\stackrel{A \subset E}{\Rightarrow} \mu(E) = \infty. \quad \square \text{ (Tapaus (1)).}$$

(2): Nyt $E \supset E_k \supset E_{k+1} \quad (\forall k \geq k_0).$

Jos $\exists k \geq k_0: \mu(E_k) = \infty$, niin $\mu(E) = \infty$;
muutoin $\forall k \geq k_0: \mu(E_k) < \infty$ ja

$$\underbrace{\mu(E_{k_0})}_{\geq k_0 \geq 0} = \sum_{k=k_0}^{\infty} \underbrace{\mu(E_k \setminus E_{k+1})}_{= \mu(E_k) - \mu(E_{k+1})} + \mu\left(\bigcap_{k=k_0}^{\infty} E_k\right)$$

$\underbrace{\quad}_{\leq -1} \quad \underbrace{\quad}_{= -\infty}$

$\square$ (Tapaus (2)).

Seuraus (ν :n Jordan-hajoitelma)

(68)

$$\nu = \nu^+ - \nu^-.$$

Tod.

Ota $E \in \mathcal{M}$. Silloin

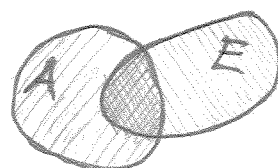
$$\nu^+(E) = \infty \xRightarrow{\text{ed. lemma}} \nu(E) = +\infty;$$

$$\nu^-(E) = \infty \xRightarrow{\text{vastavasti}} \nu(E) = -\infty.$$

Muutoin

$$\nu^+(E), \nu^-(E) \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} \nu(E) &\stackrel{A \in \mathcal{M}}{=} \nu(A \cap E) + \nu(A^c \cap E) \\ &\leq \nu^+(E) + \underbrace{\nu(A^c \cap E)}_{= -(-\nu)(A^c \cap E)} \end{aligned}$$



$$\nu^-(E) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \nu(E) \leq \nu^+(E) - \nu^-(E)$$

$$\text{eli } \nu \leq \nu^+ - \nu^-. \quad \textcircled{*}$$

$$\Rightarrow (-\nu) \stackrel{\textcircled{*}}{\leq} \underbrace{(-\nu)^+}_{=\nu^-} - \underbrace{(-\nu)^-}_{=\nu^+}$$

$$\text{eli } \nu \geq \nu^+ - \nu^-. \quad \textcircled{**}$$

$$\textcircled{*}, \textcircled{**} \Rightarrow \blacksquare$$

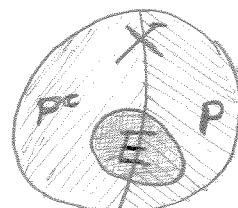
Määr.

"Merkkillisen mitan" $\nu: \mathcal{M} \rightarrow [-\infty, \infty]$

Hahn-hajoitelma on (P, P^c) , missä

$P \in \mathcal{M}$ ja kaikilla $E \in \mathcal{M}$ pätee

$$\nu(E) = \underbrace{\nu(P \cap E)}_{\geq 0} + \underbrace{\nu(P^c \cap E)}_{\leq 0}.$$

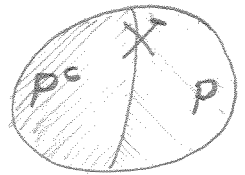


[ajatus: joukko $P \subset X$ " ν -positiivinen",
joukko $P^c \subset X$ " ν -negatiivinen".]

Määr.

Mitat $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ ovat keskenään singulaariset, merkitään $\mu_1 \perp \mu_2$, jos $\exists P \in \mathcal{M} : \mu_1(P) = 0 = \mu_2(P^c)$.

[ajatus: μ_1 "ei näe" joukkoa P ,
 μ_2 "ei näe" joukkoa P^c .]

Lause (Hahn)

"Merkkilliselle mitalle" $\nu : \mathcal{M} \rightarrow [-\infty, \infty]$ on olemassa Hahn-hajoitus/ma (ν^-, ν^+) .

Tarkemmin: $\nu^- \perp \nu^+$ siten, että
 $\nu^-(P) = 0 = \nu^+(P^c)$.

Tod.

Oleta $\nu^+(X) < \infty$ (muutoin $(-\nu)^+(X) < \infty$ jne...). $\circledast$
 $= \sup_{A \in \mathcal{M}} \nu(A)$.

Ota $A_n \in \mathcal{M}$, jolle $\nu^+(X) - \nu(A_n) < 2^{-n}$. $\circledast\circledast$

$$P := \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}.$$

$$0 \leq \nu^-(P) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \underbrace{\nu^-(A_k)}_{\text{Jordan}} \stackrel{\text{Jordan}}{=} \nu^+(A_k) - \nu(A_k) \leq \nu^+(X) - \nu(A_k) \stackrel{\circledast\circledast}{\leq} 2^{-k}.$$

$$\Rightarrow \nu^-(P) = 0.$$

$$0 \leq \nu^+(P^c) = \nu^+\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k^c\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \nu^+\left(\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k^c\right)$$

$$\leq \nu^+(A_j^c) \stackrel{\circledast}{=} \nu^+(X) - \nu^+(A_j)$$

$$\leq \nu^+(X) - \nu(A_j)$$

$$\stackrel{\circledast\circledast}{\leq} 2^{-j}$$

$$\Rightarrow \nu^+(P^c) = 0.$$

$$\nu(E) = \underbrace{\nu(P \cap E)}_{= \nu^+(E) \geq 0} + \underbrace{\nu(P^c \cap E)}_{= -\nu^-(E) \leq 0}$$

(Huom. Jordan: $\nu = \nu^+ - \nu^-$)

Tehtävä

Olkoot $(P, P^c), (Q, Q^c)$ $\mathcal{U}$:n Hahn-hajoitelmia.
Osoita, että $| \mathcal{U} | (P \setminus Q) = 0$.

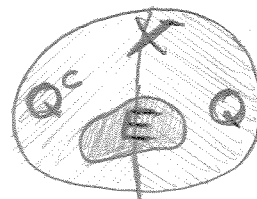
[Ajatus:
Hahn-hajoitelmien "olennaisesti samat".]

Tehtävä

Olkoon (Q, Q^c) "merkillisen mitan" $\mathcal{U}: \mathcal{M} \rightarrow [-\infty, \infty]$
Hahn-hajoitelma. Olkoon $E \in \mathcal{M}$.

Osoita, että

$$\begin{cases} \mathcal{U}^+(E) = +\mathcal{U}(Q \cap E), \\ \mathcal{U}^-(E) = -\mathcal{U}(Q^c \cap E). \end{cases}$$



[Ajatus:
 $\mathcal{U}$:n negatiivinen osa $\mathcal{U}^-$ "ei näe"
avaruuden X " $\mathcal{U}$ -positiivista osaa" Q jne.]

Tehtävä

Olkoon $\nu = \alpha - \beta$ "merkillinen mitta",
missä $\alpha \perp \beta$. Osoita, että

$$\alpha = \mathcal{U}^+, \quad \beta = \mathcal{U}^-.$$

[Huom: tässä mielessä Jordan-hajoitelma on
"luonnollisin" $\mathcal{U}$:n hajoitelma mittojen erotukseksi.]

Määr.

"Merkillinen mitta" $\nu: \mathcal{M} \rightarrow [-\infty, \infty]$ on absoluuttisesti jatkuv mitan $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ suhteen, merkitään $\nu \ll \mu$, jos

$$\forall E \in \mathcal{M}: \mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0.$$
Propositio 6.32

Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

- (1) $\nu \ll \mu$,
- (2) $|\nu| \ll \mu$,
- (3) $\nu^- \ll \mu$ ja $\nu^+ \ll \mu$.

Todistus

Tehtävä. $\blacksquare$

Lause 6.33

Olkoon $\nu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ "merkillinen mitta". Silloin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

- (a) $\nu \ll \mu$
- (b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E \in \mathcal{M}: \mu(E) < \delta \Rightarrow |\nu(E)| < \varepsilon.$

Huom.

Lauseessa 6.33 oletus $\nu(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R}$ tarvitaan kohdassa $(b \Rightarrow a)$.

Ehto (b) muistuttaa perinteistä funktion tasaista jatkuvuutta

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X: d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Tod. (Lause 6.33)

(b $\Rightarrow$ a) Ota $E \in \mathcal{M}$, jolle $\mu(E) = 0$.

$$\stackrel{(b)}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0: |\nu(E)| < \varepsilon,$$

$$\text{Siis } \nu(E) = 0. \quad \square$$

(a $\Rightarrow$ b) Vastaoletus (negaatio (b):lle):

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists E_\delta \in \mathcal{M}: \mu(E_\delta) < \delta \text{ \& \> } |\nu(E_\delta)| \geq \varepsilon.$$

Olkoon

$$E := \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E_{2^{-k}} \in \mathcal{M}.$$

$$0 \leq \mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_{2^{-k}}\right) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \underbrace{\mu(E_{2^{-k}})}_{< 2^{-k}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \mu(E) = 0.$$

$$|\nu|(E) = |\nu|\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E_{2^{-k}}\right) \quad \parallel \quad \begin{array}{l} \nu(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R}, \text{ joten} \\ |\nu|(X) < \infty \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{j \rightarrow \infty} |\nu|\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_{2^{-k}}\right) \\ &\geq |\nu|(E_{2^{-j}}) \geq |\nu(E_{2^{-j}})| \geq \varepsilon \\ &\geq \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\nu| \not\ll \mu$$

eli $\nu \not\ll \mu$ (Proposition 6.32 nojalla).



Seuraavaksi lähdetään tarkastelemaan

integroinnin yhteyttä absoluuttiseen jatkuvuuteen

— huipentumana tällä saralla on

Radon-Nikodym-lause (ks. s. 75).

Propositio

Olkoon $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ μ -mitallinen
ja f^+ tai f^- μ -integroituva.

Kun $E \in \mathcal{M}$, määritellään

$$\nu(E) := \int_E f \, d\mu.$$

Silloin $\nu \ll \mu$.

Lisäksi: $\nu(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R} \iff f \in L^1(\mu)$.

Tod.

Tehtävä. $\blacksquare$

Huom.

Kun ν on kuten propositiossa yllä, on

$$\begin{cases} \nu^+(E) = \int_E f^+ \, d\mu, \\ \nu^-(E) = \int_E f^- \, d\mu. \end{cases}$$

Silloin Hahn-hajoitelmia ovat mm. (P, P^c) , (Q, Q^c) ,

missä $\begin{cases} P = \{f \geq 0\}, \\ Q = \{f > 0\}. \end{cases}$

6.6 Mittojen derivointi (Radon-Nikodym) (74.)

Seuraavassa $(X, \mathcal{M}, \mu)$ on mitta-avaruus, missä μ on σ -äärellinen eli

$$\exists \{X_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M} : \mu(X_j) < \infty, \quad X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j.$$

Esim.

Lebesgue-mitta $\lambda_{\mathbb{R}^n}$ on σ -äärellinen.

Laskurimitta $\mu = (E \mapsto \#E) : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$

on σ -äärellinen jos ja vain jos

X on (enintään) numeroituva.

Määr.

Olkoon $\nu(E) = \int_E f d\mu$ kuten edellisen sivun propositiassa (nyt $\nu \ll \mu$).

Sanotaan, että $\frac{d\nu}{d\mu} := f$ on

Radon-Nikodym-derivaatta ν :stä μ :n suhteen.

Huom.

$\frac{d\nu}{d\mu}$ on oikeastaan elvivalenssiluokka

$\{g : X \rightarrow [-\infty, \infty] \text{ } \mu\text{-mitallinen} \mid g = f \text{ } \mu\text{-m.k.}\}.$

Radon-Nikodym-derivaatan yhteys tavalliseen derivaattaan paljastuu myöhemmin, kun tarkastellaan tapausta $\mu = \lambda_{\mathbb{R}}$.

Päätulos: (Radon-Nikodym)...

Lause 6.38 (Radon-Nikodym)

Olkoon $\nu \ll \mu$, missä μ on σ -äärellinen.

Silloin on olemassa Radon-Nikodym-derivaatta

$$\frac{d\nu}{d\mu}$$

$$(\text{eli } \nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu \quad (\forall E \in \mathcal{M})).$$

Tehtävä

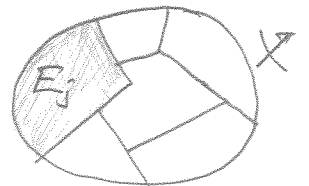
Näytä esimerkeillä, että lauseen 6.38 oletus μ on σ -äärellisyydestä on tarpeen.

Radon-Nikodym-lause todistetaan vaiheittain: aluksi otetaan tapaus, jossa ν ja μ ovat äärellisiä mittoja, joille $\nu \ll \mu$.

Määr. 6.34

Joukon X μ -ositus on pistevieras perhe $\{E_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{M}$, jolle $X = \bigcup_{j \in J} E_j$ (ts. kyseessä X in erillinen μ -peite).

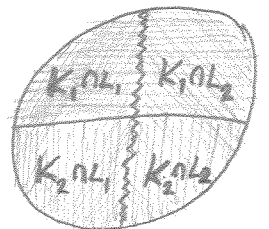
μ -ositus $\mathcal{K}$ on μ -osituksen $\mathcal{L}$ hienonnus, jos $\forall K \in \mathcal{K} \exists L \in \mathcal{L} : K \subset L$.

Esim.

Jos $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ ovat μ -osituksia,

niin $\{K \cap L \mid K \in \mathcal{K}, L \in \mathcal{L}\}$

on niiden molempien yhteinen hienonnus.



Määr. 6.35

(Huom. äärellisyys!)

Olkoot $\nu, \mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty[$ mittoja,
joille $\nu \leq \mu$. Olkoon $\mathcal{P} = \{E_j\}_{j=1}^k$
joukon X äärellinen μ -ositus.

Määr. $h_{\mathcal{P}}: X \rightarrow \mathbb{R}$ s.e.

$$h_{\mathcal{P}}(x) := \begin{cases} \frac{\nu(E_j)}{\mu(E_j)}, & \text{jos } x \in E_j \text{ ja } \mu(E_j) > 0, \\ 0, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Huom.

$0 \leq h_{\mathcal{P}} \leq 1$, $h_{\mathcal{P}}$ yksinkertainen μ -mitallinen,

$$h_{\mathcal{P}} = \sum_{j=1}^k \frac{\nu(E_j)}{\mu(E_j)} \cdot \chi_{E_j}$$

[Idea seuraavassa: $h_{\mathcal{P}} \xrightarrow[\substack{\text{hienonee} \\ \text{sopivasti}}]{\|\cdot\|_{L^2(\mu)}} \frac{d\nu}{d\mu}$].

Lemma 6.36

Jos äärellinen μ -ositus $\mathcal{P}'$ hienontaa $\mathcal{P}$:n

ja jos $E \in \mathcal{P}$, niin

$$\nu(E) = \int_E h_{\mathcal{P}} d\mu = \int_E h_{\mathcal{P}'} d\mu$$

$$\begin{aligned} \text{ja } \|h_{\mathcal{P}'}\|_{L^2(\mu_E)}^2 &= \|h_{\mathcal{P}}\|_{L^2(\mu_E)}^2 + \|h_{\mathcal{P}'} - h_{\mathcal{P}}\|_{L^2(\mu_E)}^2 \\ &\geq \|h_{\mathcal{P}}\|_{L^2(\mu_E)}^2. \end{aligned}$$

[Muistutus: $\|f\|_{L^2(\mu_E)} = (\int_E |f|^2 d\mu)^{1/2}$].