Seminormista normiin

Olkoon V $\mathbb{R}$-vektoriavaruus.

Seminormi on kuvaus $s: V \to [0, \infty[$,

jolle

$$\begin{cases} s(f+g) \le s(f) + s(g) \\ s(\lambda f) = |\lambda|\, s(f) \end{cases} \qquad (f, g \in V,\ \lambda \in \mathbb{R});$$

s on normi, jos lisäksi

$$s(f) = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Määr. $f \sim g$ joss $s(f-g) = 0$;

$\sim$ on ekvivalenssirelaatio V:llä,

olkoon

$$L := V/\sim \; = \{ [f] : f \in V \},$$

missä $[f] = \{ g \in V : f \sim g \}$.

(Erityisesti $[0] = \{ g \in V : s(g) = 0 \} \subset V$ aliavaruus.)

L on $\mathbb{R}$-vektoriavaruus, kun määritellään

$$\lambda [f] := [\lambda f],$$

$$[f] + [g] := [f+g],$$

ja sillä on normi

$$[f] \mapsto s(f).$$

Vektoriavaruuden V normi
$$(v \mapsto \|v\|) : V \to [0,\infty[$$
määrittelee "normimetriikan"
$$d : V \times V \to [0,\infty[,$$
$$d(u,v) := \|u-v\|.$$

Huom. Cauchy-jono $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset V$ on rajoitettu:
$$\|u_j\| \leq \underbrace{\|u_j - u_k\|}_{\substack{= d(u_j,u_k) \\ < \varepsilon, \text{ kun } j,k \geq N_\varepsilon}} + \|u_k\|$$
$$\Rightarrow \|u_j\| \overset{\varepsilon:=1}{\leq} \underbrace{1 + \|u_{N_1}\|}_{<\infty \text{ vakio.}} \qquad (\forall j \in \mathbb{Z}^+).$$

Sanonta:

V on Banach-avaruus, jos sen normimetriikka on täydellinen (eli jokainen Cauchy-jono suppenee).

Tehtävä

Tarkista tämän ja edellisen sivun väittämät.

6.4 L^p-avaruudet

("L" niin kuin "Lebesgue")

Seuraavassa $(X, \mathcal{M}, \mu)$ on mitta-avaruus.

Määr.

Olkoon $1 \leq p < \infty$.

$\mathcal{M}$-mitallisen $f : X \to [-\infty, \infty]$

$L^p(\mu)$-luku on

$$\begin{cases} \|f\|_{L^p(\mu)} := \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} & (\text{kun } 1 \leq p < \infty), \\ \|f\|_{L^\infty(\mu)} := \inf\{M \in [0,\infty] : |f| \leq M \ \mu\text{-m.k.}\} \end{cases}$$

Jos μ asiayhteydestä tuttu, merkitään

$$L^p = L^p(X) = L^p(\mu)$$

(esim. $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\lambda_{\mathbb{R}^n})$).

Huom. Selvästi

$\|f\|_{L^p} \in [0, \infty]$,

$\|f\|_{L^p(\mu)} = 0$ joss $f = 0$ μ-m.k.,

$\|\lambda f\|_{L^p} = |\lambda| \cdot \|f\|_{L^p}$,

$\|f\|_{L^1(\mu)} = \int |f| \, d\mu$.

Määr.

Luvun $p \in [1, \infty]$ (Lebesgue-)konjugaatti on $p' \in [1, \infty]$, jolle

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 & (\text{kun } 1 < p < \infty), \\ 1' := \infty, \quad \infty' := 1. \end{cases}$$

Lause 6.20 (Hölderin epäyhtälö)

Olkoon $1 \le p \le \infty$,

$f, g : X \to [-\infty, \infty]$ μ-mitallisia.

Silloin

$$\|fg\|_{L^1(\mu)} \le \|f\|_{L^p(\mu)} \|g\|_{L^q(\mu)},$$

missä $q = p'$.

Tod.

$(p=1)$: $\|fg\|_{L^1} = \overbrace{\int \underbrace{|f|\,|g|}_{\le |f| \cdot \|g\|_{L^\infty} \ \mu\text{-m.k.}} d\mu}^{\le \int |f| \cdot \|g\|_{L^\infty} d\mu} \le \int |f| d\mu \, \|g\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty}$. $\boxtimes$

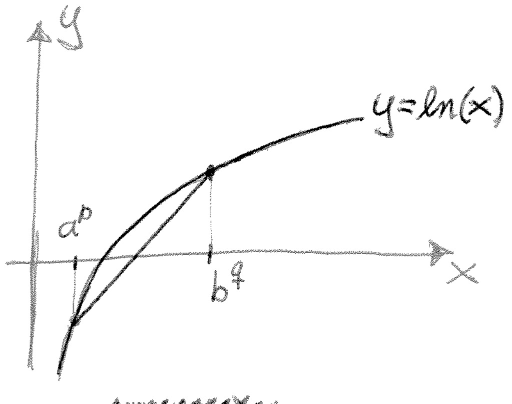
$(p=\infty)$: kuten $(p=1)$. $\boxtimes$

ol. $0 < \|f\|_{L^p}, \|g\|_{L^q} < \infty$ (muutoin triviaali!)

$$(1<p<\infty): \quad \|fg\|_{L^1} = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \cdot \int \underbrace{\underbrace{\frac{|f|}{\|f\|_{L^p}}}_{=:a} \cdot \underbrace{\frac{|g|}{\|g\|_{L^q}}}_{=:b}}_{\overset{\circledast}{\le} \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q} d\mu$$

$$\le \frac{1}{p} \int a^p d\mu + \frac{1}{q} \int b^q d\mu$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$



$\circledast$

$$\ln\Big(\underbrace{\frac{1}{p} a^p + \underbrace{\frac{1}{q}}_{(1-\frac{1}{p})} b^q}_{\in [a^p, b^q] \text{ tai } [b^q, a^p]}\Big) \ge \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) = \ln(a \cdot b).$$ $\blacksquare$

Lause 6.22 (Minkowskin epäyhtälö)

Olkoon $1 \leq p \leq \infty$,

$f, g : X \to [-\infty, \infty]$ μ-mitallisia.

Silloin

$$\|f+g\|_{L^p(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)} + \|g\|_{L^p(\mu)}.$$

Tod.

$(p=1)$: $\|f+g\|_{L^1} = \int \underbrace{|f+g|}_{\leq |f|+|g|} d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu$

$= \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}.$ ☒

$(p=\infty)$: $|f+g| \leq |f| + |g|$ kaikkialla

$\Rightarrow |f+g| \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}$ μ-m.k.

$\Rightarrow \|f+g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}.$ ☒

$(1<p<\infty)$:

$$\|f+g\|_{L^p}^p = \int |f+g|^p d\mu$$

$$= \int \underbrace{|f+g|}_{\leq |f|+|g|} \cdot |f+g|^{p-1} d\mu$$

$$\leq \|f \cdot |f+g|^{p-1}\|_{L^1} + \|g \cdot |f+g|^{p-1}\|_{L^1}$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \cdot \underbrace{\| |f+g|^{p-1} \|_{L^q}}$$

$q = p' = \frac{p}{p-1}$

$$= \left(\int |f+g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q}$$

$$= \left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{(p-1)/p}$$

$$= \|f+g\|_{L^p}^{p-1}.$$ ■

Olkoon $V^p := \{ f : \|f\|_{L^p(\mu)} < \infty \}$. $(1 \le p \le \infty)$.

$\|\lambda f\|_{L^p} = |\lambda| \, \|f\|_{L^p}$ & Minkowski $\Rightarrow$

$$(f \mapsto \|f\|_{L^p(\mu)}) : V^p \to [0,\infty[$$

on seminormi.

Määr. $f \sim g$ joss $\|f-g\|_{L^p(\mu)} = 0$

(eli $f = g$ μ-m.k., $f,g \in V^p$).

Saadaan $\mathbb{R}$-vektoriavaruus

$$L^p(\mu) := V^p/\sim,$$

jolla normi

$$(\underbrace{[f]}_{=\{g \in V^p :\ f \sim g\}} \mapsto \|f\|_{L^p(\mu)}) : L^p(\mu) \to [0,\infty[.$$

Huom.

$f \in [f]$ on funktio $X \to [-\infty,\infty]$,

$[f] \in L^p(\mu)$ ei ole funktio!

On kuitenkin tapana samaistaa f ja $[f]$;

merkitään lyhyesti

$$f \in L^p(\mu) \quad (\text{eikä } [f] \in L^p(\mu)).$$

Merk. $\ell^p(X) := L^p(\mu)$, kun $\mu(E) := \# E$.

Sanonta:

$f_j \xrightarrow{L^p} f$ eli $f_j \to f$ L^p:ssä, jos

$\lim_{j \to \infty} \|f_j - f\|_{L^p} = 0$, missä $f \in L^p$, $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset L^p$.

Lause 6.24

$L^p(\mu)$ on Banach-avaruus $(1 \le p \le \infty)$.

(metriikkana L^p-normin antama).

Tod.

Tiedetään jo, että L^p on normiavaruus.

Tapaus $p = \infty$ jätetään tehtäväksi.

Olkoon $1 \le p < \infty$.

Ota Cauchy-jono $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset L^p(\mu)$.

[Tarvitaan ehdokas f raja-arvoksi.]

$\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono mitassa μ:

$$\mu(\{|f_i - f_j| \ge \varepsilon\}) = \mu(\{|f_i - f_j|^p \ge \varepsilon^p\})$$

$$\overset{\text{Tsebyshev (Teht. 5.3)}}{\le} \varepsilon^{-p} \int |f_i - f_j|^p \, d\mu$$

$$= \varepsilon^{-p} \| f_i - f_j \|_{L^p}^p \xrightarrow[i,j \to \infty]{} 0 .$$

$\overset{\text{Teht. 5.1}}{\Rightarrow}$ $f_j \to f$ mitassa μ eräälle $\mathcal{M}$-mitalliselle f

$\overset{\text{Lause 5.23 (s.39)}}{\Rightarrow}$ $f_{j_k} \to f$ μ-m.k. eräällä osajonolla $\{f_{j_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$

$f \in L^p(\mu)$, koska $\mathcal{M}$-mitallinen ja

$$\|f\|_{L^p}^p = \int |f|^p \, d\mu = \int \liminf_{k \to \infty} |f_{j_k}|^p \, d\mu$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\le} \liminf_{k \to \infty} \underbrace{\int |f_{j_k}|^p \, d\mu}_{= \|f_{j_k}\|_{L^p}^p \le \text{vakio} < \infty, \text{ koska Cauchy-jono rajoitettu (ks. s. 55)}} \le \text{vakio} < \infty .$$

$$\|f_i - f\|_{L^p}^p = \int |f_i - f|^p \, d\mu = \int \liminf_{k \to \infty} |f_i - f_{j_k}|^p \, d\mu$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\le} \liminf_{k \to \infty} \underbrace{\int |f_i - f_{j_k}|^p \, d\mu}_{\|f_i - f_{j_k}\|_{L^p}^p \xrightarrow[i,k \to \infty]{} 0}$$

$$\Rightarrow f_i \xrightarrow{L^p} f . \quad \blacksquare$$

Lause 6.25 (Vitalin suppenemislause)

Olkoon $1 \le p < \infty$,

$f_j,\ f \in L^p(\mu) \quad (j \in \mathbb{Z}^+)$.

Silloin $(1,2,3) \Rightarrow (0) \Rightarrow (2,3)$:

(0) $f_j \to f$ L^p:ssä.

(1) $f_j \to f$ μ-m.k.

(2) $\forall \varepsilon\ \exists E\ \forall j:\quad \mu(E) < \infty,\ \int_{X \setminus E} |f_j|^p d\mu < \varepsilon$.

(3) $\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall j:\quad \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f_j|^p < \varepsilon$.

Lisäksi $(0) \Rightarrow f_{j_k} \to f$ μ-m.k. eräälle osajonolle.

Tod.

Oletetaan (1, 2, 3).

Ota $\varepsilon > 0$.

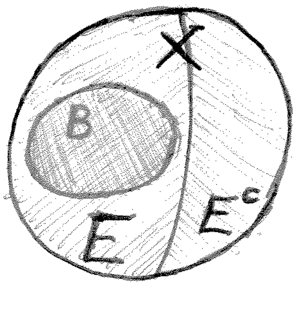
Ota $\delta > 0$ kuten (3):ssa.

Ota $E \in \mathcal{M}$ kuten (2):ssa.

Jegorov $\overset{\mu(E)<\infty}{\underset{(1)}{\Longrightarrow}}$ $(f_j - f)|_E \to 0$ μ-melkein tasaisesti.

$\Rightarrow \exists B \in \mathcal{M}$, jolle

$$\begin{cases} B \subset E, \quad \mu(E \setminus B) < \delta, \\ (f_j - f)|_B \to 0 \text{ tasaisesti.} \quad \circledast \end{cases}$$



$$\underbrace{\|f_j - f\|_{L^p}^p}_{\text{Halutaan osoittaa, että tämä menee nollaan, kun } j \to \infty.} = \int |f_j - f|^p d\mu$$

$$= \underbrace{\int_B |f_j - f|^p d\mu}_{\xrightarrow[j\to\infty]{\circledast,\ \mu(B)<\infty} 0} + \underbrace{\int_{B^c} |f_j - f|^p d\mu}_{\text{Entä tämä?}}$$

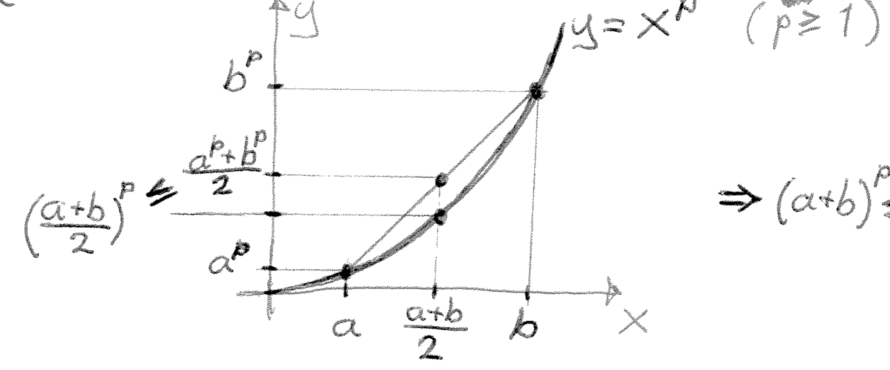
...

...

62.

$$|f_j - f|^p \le 2^{p-1}(|f_j|^p + |f|^p),$$

koska



$$\Rightarrow (a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p+b^p).$$

$$\Rightarrow \int_{B^c} |f_j - f|^p d\mu \le 2^{p-1}\Big[\underbrace{\int_{B^c} |f_j|^p d\mu}_{=\underbrace{\int_{E^c}|f_j|^p d\mu}_{\overset{(2)}{<}\varepsilon} + \underbrace{\int_{E\setminus B}|f|^p d\mu}_{\overset{(3)}{<}\varepsilon}} + \underbrace{\int_{B^c} |f|^p d\mu}_{= \int_{B^c} \liminf_{j\to\infty} |f_j|^p d\mu \ \overset{\text{Fatou}}{\le} \liminf_{j\to\infty} \underbrace{\int_{B^c}|f_j|^p d\mu}_{<2\varepsilon}}\Big]$$

$$\Rightarrow \|f_j - f\|_{L^p} \to 0. \quad \boxtimes \quad ((1,2,3) \Rightarrow (0)).$$

"$(0) \Rightarrow (3)$" jätetään tehtäväksi. $\boxtimes$

"$(0) \Rightarrow (2)$":

Tarvitaan aputulos (todistus tehtäväksi!):

(**) **Lemma** Jos $g \in L^p$ $(1 \le p < \infty)$, niin $\forall \varepsilon > 0 \ \exists E_g \in \mathcal{M}: \ \mu(E_g) < \infty, \ \int_{X\setminus E_g} |g|^p d\mu < \varepsilon.$ $\boxtimes$

Oletetaan (0): $f_j \xrightarrow{L^p} f$.

Ota $\varepsilon > 0$.

Ota j_ε s.e. $j > j_\varepsilon \Rightarrow \|f_j - f\|_{L^p(\mu)} < \varepsilon^{1/p}$. (***)

Ota $E_f, E_{f_j} \in \mathcal{M}$ kuten (**):ssä.

...

...

Olkoon $E := E_f \cup \bigcup_{j=1}^{j_\varepsilon} E_{f_j}$.

Nyt $E \in \mathcal{M}$ ja $\mu(E) < \infty$.

Jos $j \le j_\varepsilon$, niin

$$\int_{X \setminus E} |f_j|^p \, d\mu \le \int_{X \setminus E_{f_j}} |f_j|^p \, d\mu < \varepsilon .$$

Jos $j > j_\varepsilon$, niin

$$\int_{X \setminus E} |f_j|^p \, d\mu = \left[\| f_j \|_{L^p(\mu_{X \setminus E})} \right]^p$$

$$\overset{\text{Minkowski}}{\le} \Big[\underbrace{\| f_j - f \|_{L^p(\mu_{X\setminus E})}}_{< \varepsilon^{1/p}} + \underbrace{\| f \|_{L^p(\mu_{X \setminus E})}}_{\le \| f \|_{L^p(\mu_{X \setminus E_f})} < \varepsilon^{1/p}} \Big]^p$$

$$\le 2^p \cdot \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall j \in \mathbb{Z}^+ : \int_{X \setminus E} |f_j|^p \, d\mu \le 2^p \cdot \varepsilon \qquad \square \ ((0) \Rightarrow (2)).$$

"$(0) \Rightarrow f_{j_k} \to f$ μ-m.k.,"

Oleta (0): $f_j \xrightarrow{L^p} f$. Silloin

$$\mu(\{|f_j - f| \ge \varepsilon\}) = \mu(\{|f_j - f|^p \ge \varepsilon^p\})$$

$$\overset{\text{Tsebyshev}}{\le} \varepsilon^{-p} \underbrace{\int |f_j - f|^p \, d\mu}_{= \| f_j - f \|_{L^p}^p \xrightarrow[j \to \infty]{(0)} 0}$$

$\Rightarrow f_j \to f$ mitassa μ.

$\overset{\text{Lause 5.23}}{\underset{(s. 39)}{\Rightarrow}}$ $f_{j_k} \to f$ μ-m.k. eräällä osajonolla $\{f_{j_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{f_j\}_{j=1}^\infty$.

$\square$

Huom.

Jos $f_j \to f$ μ-m.k. ja

$f_j \xrightarrow{L^p} g$,

niin $f = g$ μ-m.k.

(Tod. tehtävä!)

Muistutuksia

- Integraali määritellään vaiheittain:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{\tilde{\int}} s\,d\mu \ldots, \\ \tilde{\int} f^+ d\mu \ldots, \\ \int f\,d\mu \ldots; \end{array}\right\} \text{(s. 45)}$$

Todistuksissa/vastaesimerkeissä kannattaa yleensä aloittaa yksinkertaisten funktioiden integraaleista...

- μ on "likinäköinen":

$$f = g \ \mu\text{-m.k.} \Rightarrow \int (f-g)\,d\mu = 0,$$

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f\,d\mu = 0.$$

- $L^p(\mu)$:n alkiot eivät ole funktioita $X \to [-\infty, \infty]$, vaan ... (ks. s. 59).