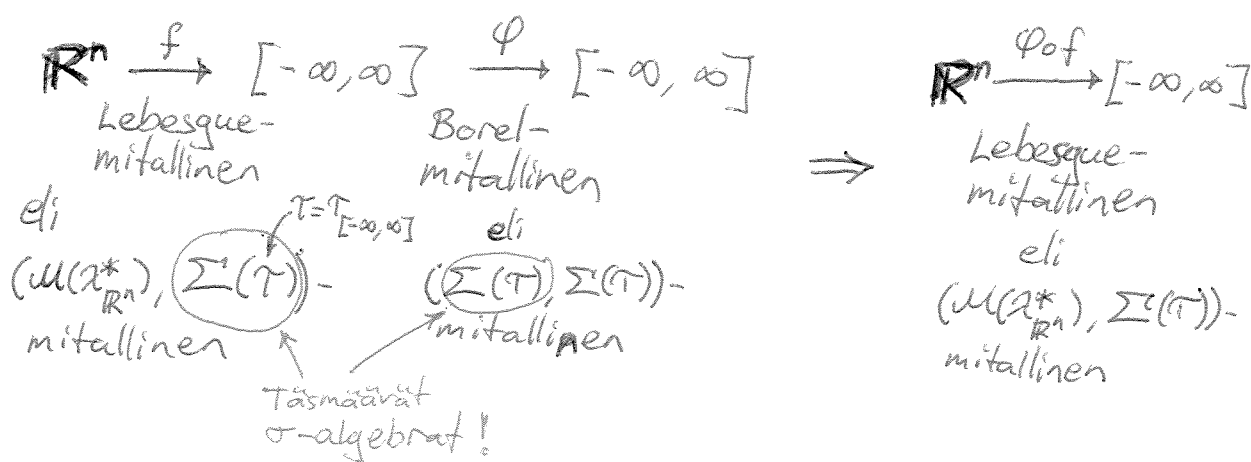


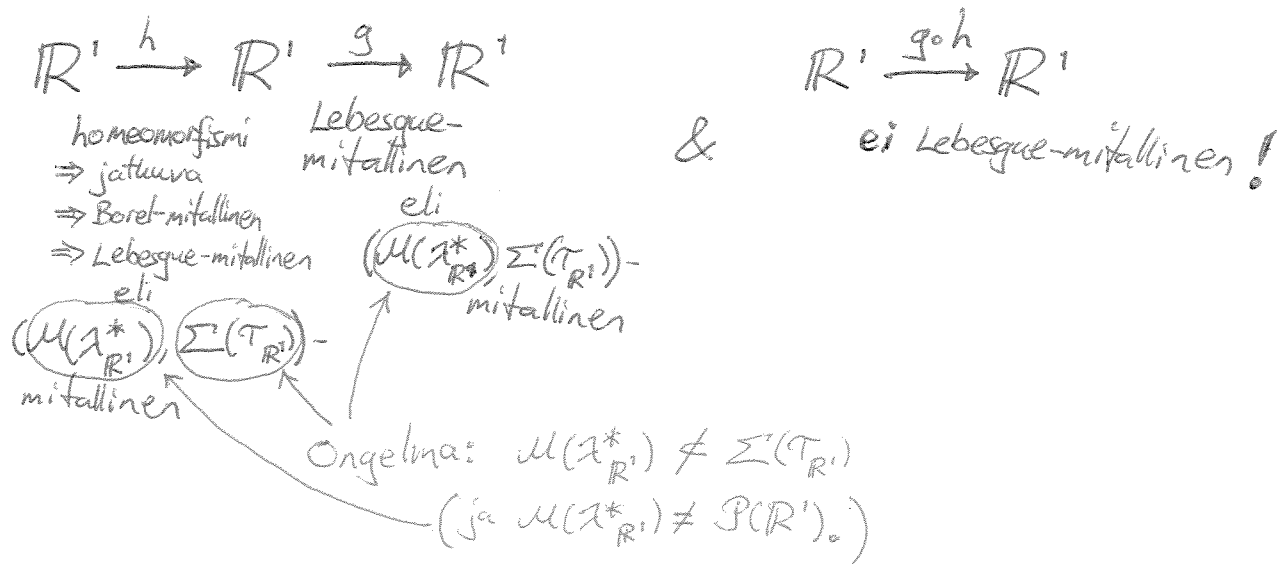
Huom. 5.5

Esim. jatkuva φ kelpaa.

Huom. 5.6

Valinta-aksioma $\stackrel{[GZ4.5]}{\Rightarrow} \mathcal{M}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}^*) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

Silloin $\exists g, h: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ s.e.



Jatkuva funktio $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on Lebesgue-mitallinen eli $(\mathcal{M}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}^*), \Sigma(\tau_{[-\infty, \infty]}))$ -mitallinen, mutta usein ei $(\mathcal{M}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}^*), \mathcal{M}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}^1}^*))$ -mitallinen.

Lause 5.5, 5.8

Olkoon $a \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ ja $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{M}$ -mitallisia.
Silloin

af , $f+g$, fg , $|f|^p$, $\min(f, g)$, $\max(f, g): X \rightarrow \mathbb{R}$
ovat $\mathcal{M}$ -mitallisia.

Jos lisäksi $\forall x \in X: f(x) \neq 0$, niin $\frac{1}{f}$ on $\mathcal{M}$ -mitallinen.

Tod.

Jätetään lukijalle tehtäväksi tapaukset

af , fg , $\max(f, g)$, $\min(f, g): X \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \{f+g > a\} &= \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > a}} \{f+g > q\} \\ &= \bigcup_{\substack{r, s \in \mathbb{Q} \\ r+s > a}} \underbrace{\left(\underbrace{\{f > r\}}_{\in \mathcal{M}} \cap \underbrace{\{g > s\}}_{\in \mathcal{M}} \right)}_{\substack{\in \mathcal{M} \\ \text{numerointuma}}} \in \mathcal{M}, \end{aligned}$$

joten $f+g$ $\mathcal{M}$ -mitallinen. $\square$

$$X \xrightarrow[\mathcal{M}\text{-mit.}]{f} \mathbb{R} \xrightarrow[\substack{\text{jatkuva} \\ \Rightarrow \text{Borel-mitallinen}}]{t \mapsto |t|^p} \mathbb{R} \Rightarrow X \xrightarrow[\mathcal{M}\text{-mitallinen}]{|f|^p} \mathbb{R} \quad \square$$

$$X \xrightarrow[\mathcal{M}\text{-mit.}]{f} \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow[\substack{\text{jatkuva} \\ \Rightarrow \text{Borel-mitallinen}}]{t \mapsto 1/t} \mathbb{R} \Rightarrow X \xrightarrow[\mathcal{M}\text{-mitallinen}]{\frac{1}{f}} \mathbb{R} \quad \square$$

oletus:
 $0 \notin f(X)$.

Esim. f^2 $\mathcal{M}$ -mitallinen $\nRightarrow f$ $\mathcal{M}$ -mitallinen:

Olkoon $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in E \\ -1, & \text{kun } x \in X \setminus E \end{cases}$, $E \subset X$, $E \notin \mathcal{M}$.

$f^2 \equiv 1$ $\mathcal{M}$ -mitallinen, f ei.

Määr. Olkoon $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mitta-avaruus.
 Sanotaan, että jokin ominaisuus pätee
 μ -m.k. (eli μ -melkein kaikkialla),
 jos se pätee joukossa $X \setminus N$, jolle
 $N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$.

Lause 5.9. (esim. $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mu^*)$)

Olkoon $(X, \mathcal{M}, \mu)$ täydellinen mitta-avaruus,
 $f, g: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ ja f $\mathcal{M}$ -mitallinen.

Jos $f = g$ μ -m.k., niin g on $\mathcal{M}$ -mitallinen.

Tod.

$$N := \{f \neq g\} \quad (\text{eli } N = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}).$$

$$\text{Nyt } N \in \mathcal{M}, \mu(N) = 0.$$

$$\begin{aligned} \{g \geq a\} &= (\underbrace{\{g \geq a\} \cap N}_{\substack{\subseteq N, \mu(N)=0 \\ \Rightarrow \{g \geq a\} \cap N \in \mathcal{M}, \\ \text{koska } \mu \text{ täydellinen.}}}) \cup (\underbrace{\{g \geq a\} \cap N^c}_{\substack{= \{f \geq a\} \cap N^c \in \mathcal{M} \\ \underbrace{\{f \geq a\}}_{\in \mathcal{M}} \quad \underbrace{N^c}_{\in \mathcal{M}}}}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \{g \geq a\} \in \mathcal{M} \quad (\forall a \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Määr. Kun μ täydellinen mitta, merkitään $f \stackrel{\mu}{\sim} g$,
 jos $f = g$ μ -m.k.

(Samaistetaan funktiot, joita μ "ei erota toisistaan".

Esim. $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$, jolle $\mu(\{f = \infty\}) = 0$;

$f \stackrel{\mu}{\sim} g: X \rightarrow \mathbb{R}$, kun...

5.2 Mitallisten funktioiden jonot

(35.)

Huom. Numeroitava!

Lause 5.13

Olkoot $f_i : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ $\mathcal{M}$ -mitallisia ($i \in \mathbb{Z}^+$).

Silloin $\mathcal{M}$ -mitallisia ovat myös

$$\sup_i (f_i), \inf_i (f_i), \limsup_{i \rightarrow \infty} (f_i), \liminf_{i \rightarrow \infty} (f_i).$$

Tod.

$$(1) \quad \left\{ \sup_i (f_i) > a \right\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{\{f_i > a\}}_{\in \mathcal{M}} \in \mathcal{M}. \quad \square$$

$$(1) \Rightarrow (2) \quad \inf_i (f_i) = - \sup_i (-f_i) \quad \mathcal{M}\text{-mitallinen}. \quad \square$$

$$(1,2) \Rightarrow (3) \quad \limsup_{i \rightarrow \infty} (f_i) = \inf_{j \geq 1} \left(\sup_{i \geq j} (f_i) \right) \quad \mathcal{M}\text{-mitallinen}. \quad \square$$

$$(1,2) \Rightarrow (4) \quad \liminf_{i \rightarrow \infty} (f_i) = \sup_{j \geq 1} \left(\inf_{i \geq j} (f_i) \right) \quad \mathcal{M}\text{-mitallinen}. \quad \blacksquare$$

Määr. (Suppenemisistä)

Olkoot $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ ($j \in \mathbb{Z}^+$)

ja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Sanotaan, että

$f_j \rightarrow f$ pisteittäin (" f_j suppenee f :ään pisteittäin") jos

$$\forall x \in X : |f_j(x) - f(x)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0;$$

$f_j \rightarrow f$ tasaisesti, jos

$$\sup_{x \in X} |f_j(x) - f(x)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

[Selvästi "tasaisesti $\Rightarrow$ pisteittäin".]
 $\nLeftarrow$

(36.)

Olhoon $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mitta-avaruus, jolle $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mu^*)$,
 $f_j: X \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{M}$ -mitallisia ($j \in \mathbb{Z}^+$) ja μ "laajin mahdollinen",
 $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$. Sanotaan, että (ks. s. 10)

$f_j \rightarrow f$ μ -m.k. ("f_j suppenee f:ään μ -melkein kaikkialla"), jos
 μ -m.k. $x \in X$: $|f_j(x) - f(x)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$;

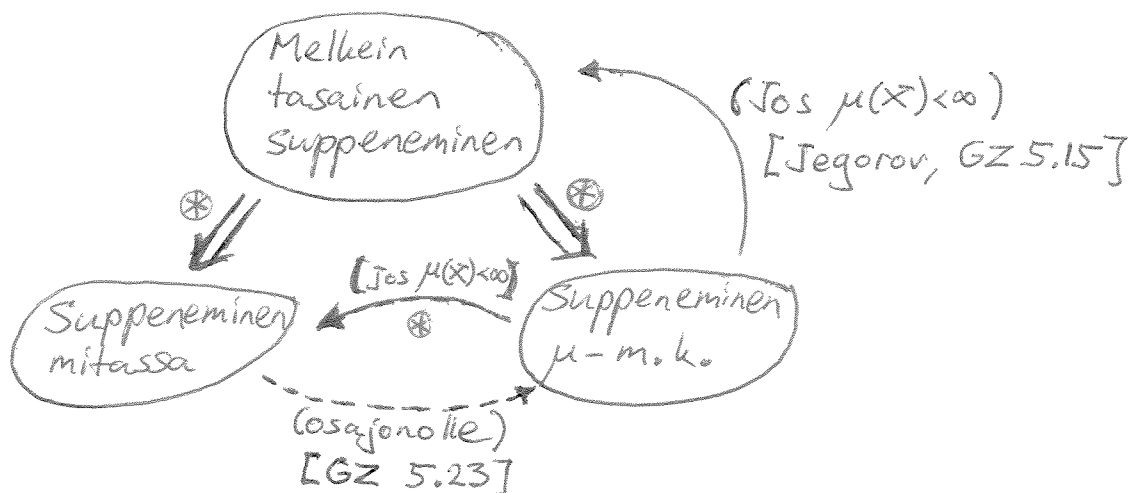
$f_j \rightarrow f$ μ -melkein tasaisesti, jos

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon \in \mathcal{M}: \begin{cases} (f_j - f)|_{A_\varepsilon} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \text{ tasaisesti,} \\ \mu(X \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon; \end{cases}$$

$f_j \rightarrow f$ mitassa μ , jos ~~jos $\mu(X) < \infty$~~

$$\forall \varepsilon > 0: \mu^*(\{f_j - f| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Huom. Osoittautuu, että



Tehtävä: Todista implikaatiot $\otimes$. Näytä esimerkein, ettei näitä implikaatioita voi kääntää, ja että oletukset " $\mu(X) < \infty$ " kaaviossa olennaisia.

Huom. Olkoon $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ^{kuten edellä.} ~~mitallinen mitta-avaruus~~

Jos $f_j \rightarrow f$ μ -m.k., niin $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$
on $\mathcal{M}$ -mitallinen! [$\Leftarrow$ Lauseet 5.9 ja 5.13].

Siten jos

$f_j \rightarrow f$ mitassa tai

$f_j \rightarrow f$ melkein tasaisesti,

niin f on $\mathcal{M}$ -mitallinen (ks. edellinen kaavio).

Vastaavasti myös $f(x) \in \mathbb{R}$ μ -m.k. $x \in X$!

Lause 5.15 [Jegorov eli "Egoroff"]

Olkoon $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mitta-avaruus,

jolle $\mu(X) < \infty$, ~~mitallinen mitta-avaruus~~ $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mu^*)$.

Oletetaan, että $f_j \rightarrow f$ μ -m.k.

Silloin $f_j \rightarrow f$ melkein tasaisesti.

Tod.

Ota $\varepsilon > 0$.

Halutaan löytää $A_\varepsilon \in \mathcal{M}$, jolle $\mu(A_\varepsilon^c) < \varepsilon$

ja $(f_j - f)|_{A_\varepsilon} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ tasaisesti.

$$E := \{ |f_j - f| \rightarrow 0 \}$$

$$= \{ x \in X : |f_j(x) - f(x)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \}.$$

$$f_j \rightarrow f \text{ } \mu\text{-m.k.} \Rightarrow E \in \mathcal{M}, \mu(E^c) = 0.$$

...

$$A_{j_k} := \bigcap_{i=j_k}^{\infty} \underbrace{\left\{ |f_i - \tilde{f}| < \frac{1}{k} \right\}}_{\substack{\mu\text{-mitallinen} \\ \in \mathcal{M}}} \in \mathcal{M}. \quad \mu\text{-mitallinen (ks. s. 37)}$$

(38)

Voidaan valita $j_k \in \mathbb{Z}^+$, jolle

$$\mu(A_{j_k}^c) < 2^{-k} \varepsilon,$$

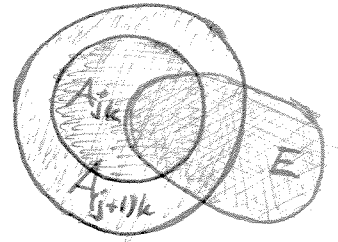
koska

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_{j_k}^c) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{j_k}^c\right) < \infty$$

$$A_{j_k}^c \supset A_{(j+1)_k}^c \in \mathcal{M}$$

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{j_k}^c\right)$$

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{j_k} \leq \mu(E^c) = 0.$$



$$\text{Olkoon } A_\varepsilon := \bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{A_{j_k}^c}_{\in \mathcal{M}} \in \mathcal{M}.$$

A_ε on haluttu joukko:

$$\mu(A_\varepsilon^c) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{j_k}^c\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{j_k}^c) < \varepsilon;$$

$$A_\varepsilon = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=j_k}^{\infty} \left\{ |f_i - f| < \frac{1}{k} \right\} \quad \text{eli}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}^+ \exists j_k \in \mathbb{Z}^+ \forall x \in A_\varepsilon: i \geq j_k \Rightarrow |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{k},$$

joten

$$(f_i - f)|_{A_\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ tasaisesti. } \square$$

Huom. Jos $\mu(X) = \infty$, voidaan Jęgorovin lausetta soveltaa joukoissa $E \subset X$, joille $\mu(E) < \infty$.

Lause 5.23

Olkoon $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mitta-avaruus, jolle $\mu = \mu(\mu^*)$ ja $f_j \rightarrow f$ mitassa μ . Silloin

$$f_{j_k} \rightarrow f \quad \mu\text{-m.k.}$$

jollekin osajonolle $\{f_{j_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Id.

Valitse $\{j_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}^+$ siten, että $j_i \neq 1$,

$$j \geq j_k > j_{k+1} \xrightarrow{f_j \rightarrow f \text{ mitassa}} \mu^*(\{ |f_{j_k} - f| \geq \frac{1}{k} \}) < 2^{-k}. \quad \otimes$$

↑
(kasvava jono)

$$\text{Olkoon } N_k := \{ |f_{j_k} - f| \geq \frac{1}{k} \},$$

$$N := \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} N_k.$$

$$\Rightarrow \mu^*(N) \leq \mu^*\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} N_k\right) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \mu^*(N_k) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \mu^*(N) = 0, \text{ joten } N \in \mathcal{M}(\mu^*) = \mathcal{M}.$$

$$N^c = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} N_k^c = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} \{ |f_{j_k} - f| < \frac{1}{k} \}$$

$$\Rightarrow \text{Jos } x \in N^c, \text{ niin}$$

$$\exists j \in \mathbb{Z}^+ : k \geq j \Rightarrow |f_{j_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}.$$

$$\Rightarrow \text{Jos } x \in N^c, \text{ niin } f_{j_k}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x). \quad \blacksquare$$

[Seuraus:

Jos $f_j \rightarrow f$ mitassa,

niin f mitallinen.]

5.3 Mitallisen funktion approksimointi

Määr. Yksinkertainen funktio $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

on karakterististen funktioiden $\chi_{E_j}: X \rightarrow \mathbb{R}$
 lineaarikombinaatio ($E_j \subset X$, $1 \leq j \leq k$);
 toisin sanoen $\#f(X) < \infty$.

Jos $\#f(X) = k$, $f(X) = \{a_j\}_{j=1}^k \subset \mathbb{R}$,
 on f :n normaaliesitys

$$f = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{f^{-1}(\{a_j\})};$$

(huom. silloin f mitallinen joss

$\forall j: f^{-1}(\{a_j\}) \subset X$ mitallinen.)

Lause 5.24

Olkoon $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$.

Silloin $\exists$ yksinkertaiset $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in \mathbb{Z}^+$) s.e.

(1) $\forall x \in X: f_i(x) \rightarrow f(x).$

Lisäksi voidaan valita $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ siten, että

(2) jos $f \geq 0$, niin $0 \leq f_i \leq f_{i+1} \leq f$,

(3) jos f rajoitettu, niin $f_i \rightarrow f$ tasaisesti,

(4) jos f mitallinen, niin f_i mitallisia,

Teht.(a) Olkoon $f \geq 0$.

$$f_i(x) := \begin{cases} \frac{k-1}{2^i}, & \text{kun } \frac{k-1}{2^i} \leq f(x) < \frac{k}{2^i} \quad (1 \leq k \leq i \cdot 2^i) \\ i, & \text{kun } f(x) \geq i. \end{cases}$$

Nyt f_i :llä halutut ominaisuudet (tarkista!). $\square$

(b) Olkoon $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$,

$$f^+(x) := \max(0, f(x)).$$

$$\text{Nyt } f = \underbrace{f^+}_{\geq 0} - \underbrace{f^-}_{\geq 0} \xRightarrow{(\alpha)} \square$$

Lause 5.25 [Luzin eli Lusin] (*mitallisen funktion "melkeinjatkuvuus")

Olkoon (X, d) metrinen avaruus,

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ mitta-avaruus, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mu^*)$,

$\mu(X) < \infty$, $\tau_d \subset \mathcal{M}$ (Borel-joukot mitallisia),

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{M}$ -mitallinen.

Silloin $\forall \varepsilon > 0 \exists F_\varepsilon \subset X$ suljettu s.e.

$$\mu(F_\varepsilon^c) < \varepsilon, \quad f|_{F_\varepsilon}: F_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R} \text{ jatkuva.}$$

Huom.

Olkoon $F \subset X$,

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva joss $[\forall x \in X \forall \{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X: d(x_k, x) \rightarrow 0 \Rightarrow |f(x_k) - f(x)| \rightarrow 0]$

$f|_F: F \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva joss $[\forall x \in F \forall \{x_k\}_{k=1}^\infty \subset F: d(x_k, x) \rightarrow 0 \Rightarrow |f(x_k) - f(x)| \rightarrow 0]$

Erityisesti

$$f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ jatkuva} \not\Rightarrow f|_F: F \rightarrow \mathbb{R} \text{ jatkuva!}$$

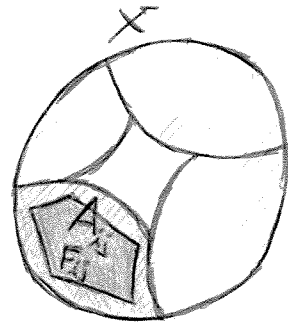
Tod. [Luzin]

Ota $H_{ij} \subset \mathbb{R}$ siten, että

$$H_{ij} = [a_{ij}, a_{ij} + \frac{1}{i}[,$$

$\{H_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ $\mathbb{R}$:n pistevieras peite.

$\Rightarrow \{A_{ij} := f^{-1}(H_{ij})\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{M}$ X :n pistevieras peite.



Approksimoidaan joukkoa $A_{ij} \in \mathcal{M}$

sisältä päin suljetulla joukolla $F_{ij} \subset X$:

$$F_{ij} \subset A_{ij}, \quad \mu(A_{ij} \setminus F_{ij}) < 2^{-(i+j)} \cdot \varepsilon.$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(X \setminus \bigcup_{j=1}^k F_{ij}) \stackrel{F_{ij} \in \Sigma(\pi_k) = \mathcal{M}, \dots}{=} \mu(X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_{ij}) \stackrel{\mu(X) < \infty}{=} \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_{ij} \setminus F_{ij}))$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{ij} \setminus F_{ij}) < 2^{-i} \cdot \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \exists k_i : \mu(X \setminus \bigcup_{j=1}^{k_i} F_{ij}) < 2^{-i} \cdot \varepsilon.$$

$$=: B_i \subset X \text{ suljettu}$$

$$\Rightarrow F_{\varepsilon} := \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \subset X \text{ suljettu,}$$

$$\mu(F_{\varepsilon}^c) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\mu(B_i^c)}_{< 2^{-i} \cdot \varepsilon} < \varepsilon.$$

Määritellään $g_i: B_i \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että

$$g_i(x) := a_{ij}, \quad \text{kun } x \in F_{ij}. \quad (\text{määritelmä ok})$$

(ks. todistuksen alkua)

$g_i: B_i \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva, koska $g|_{F_{ij}}$ vakio ja

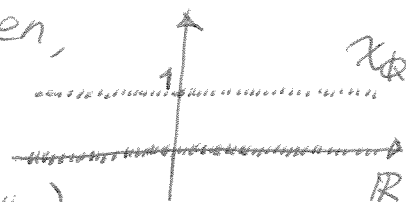
koska suljetut joukot $F_{ij} \subset X$ erillisiä!

$$x \in F_{ij} \subset B_{ij} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - g_i(x)|}_{\substack{\in H_{ij} \\ = a_{ij}}} < \frac{1}{i}$$

$$\Rightarrow g_i|_{F_{\varepsilon}} \rightarrow f|_{F_{\varepsilon}} \text{ tasaisesti. } \square$$

Esim. $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{M}(\lambda_{\mathbb{R}}^*), \lambda_{\mathbb{R}})$.

$\chi_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on Lebesgue-mitallinen,
ei missään pisteessä jatkuvaa.



(Toki $\chi_{\mathbb{Q}} = 0$ $\lambda_{\mathbb{R}}$ -melkein kaikkialla).

[Luzin] $\forall \varepsilon > 0 \exists F_{\varepsilon} = [0, 1]$ suljettu s.e.

$\lambda_{\mathbb{R}}([0, 1] \setminus F_{\varepsilon}) < \varepsilon$, $\chi_{\mathbb{Q}}|_{F_{\varepsilon}}: F_{\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva.

Onko totta? Kyllä:

$$\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \quad (\text{numerointi})$$

$$U_{\varepsilon} := \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{[x_k - 2^{-k-1}\varepsilon, x_k + 2^{-k-1}\varepsilon]}_{\text{avoin, pituus } 2^{-k}\varepsilon} \quad \text{avoin}$$

$$F_{\varepsilon} := [0, 1] \setminus U_{\varepsilon} \text{ suljettu, } \lambda_{\mathbb{R}}([0, 1] \setminus F_{\varepsilon}) < \varepsilon.$$

"Littlewoodin periaatteet"

- (1) Mitallinen joukko
on melkein avoin.

[Ks. sivun 24
approksimaatiolause]

- (2) Mitallinen funktio
on melkein jatkuva.

[Ks. Luzin, s. 41]

- (3) Pisteittäinen suppeneminen
on melkein tasaista suppenemista.

[Ks. Jęgorov, s. 37]