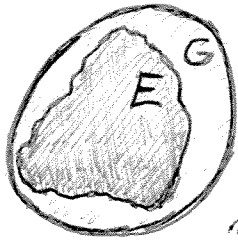


Huom. Edellisen todistuksen lopulla pääteltiin mm. $\psi(G \setminus E) = \psi(G) - \psi(E)$.

Miksi tämä on totta ~~tässä~~ tapauksessa?



$$\psi(G) \stackrel{E \subset G}{=} \psi(E \cup (G \setminus E))$$

↑ ↑
erilliset

$$\stackrel{E, G \in \mathcal{M}(\psi)}{=} \psi(E) + \psi(G \setminus E)$$

$$\begin{array}{c} \psi(E) \leq \psi(X) < \infty \\ \Rightarrow \uparrow \\ \text{Äärellisyys!} \end{array} \quad \psi(G \setminus E) = \psi(G) - \psi(E).$$

Keskeinen motivoiva esimerkki (pidettäväksi "aina" mielessä):

$X = \mathbb{R}^n$, Lebesgue-ulkomitta $\lambda_{\mathbb{R}^n}^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, joka on Borel-säännöllinen.

Ongelma: $\lambda_{\mathbb{R}^n}^*(\mathbb{R}^n) = \infty$, mutta edellisen lauseen ehtona $\psi(X) < \infty$.

Tarvitaan yleistys... Aluksi apululos:

Lemma

Olkoon $\psi: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ $\mathcal{M}$ -säännöllinen ulkomitta ja $S \in \mathcal{M}(\psi)$. Määritellään

$$\varphi: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty],$$

$$\varphi(E) := \psi(E \cap S).$$

Silloin φ on $\mathcal{M}$ -säännöllinen ulkomitta, jolle $\mathcal{M}(\psi) \subset \mathcal{M}(\varphi)$.

Tod.

Jätetään tehtäväksi näyttää,
että φ on ulkomitta,
jolle $\mu(\psi) \subset \mu(\varphi)$.

Entä μ -säännöllisyys?

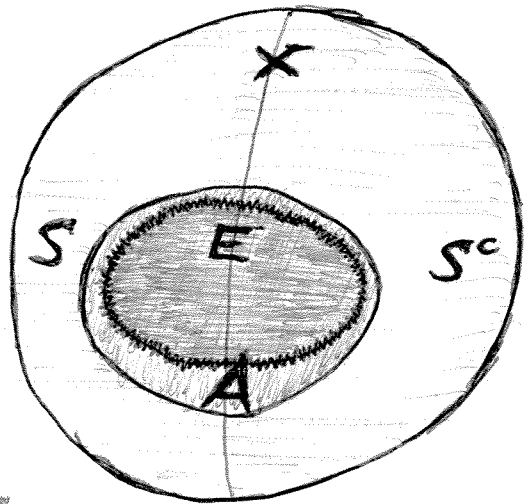
Ota $E \subset X$.

ψ μ -säännöllinen

$$\Rightarrow \exists A \in \mathcal{M}: E \subset A, \\ \psi(E) = \psi(A).$$

Näytetään, että $\varphi(E) = \varphi(A)$:

$$\begin{aligned} \psi(A) &\stackrel{\text{SEM}(\psi)}{=} \underbrace{\psi(A \cap S)} + \underbrace{\psi(A \cap S^c)} \\ &\stackrel{\parallel}{=} \underbrace{\psi(E \cap S)} + \underbrace{\psi(E \cap S^c)} \\ &\Rightarrow \text{ollava } \psi(E \cap S) = \psi(A \cap S) \text{ ja } \psi(E \cap S^c) = \psi(A \cap S^c) \\ &\Rightarrow \varphi(A) = \psi(A \cap S) = \psi(E \cap S) = \varphi(E). \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Edellisen lauseen (s. 18) yleistys (helpaa, kun $\psi = \mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}^*$):

Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja

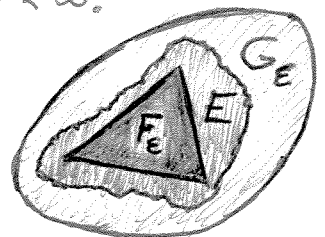
$\psi: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ Borel-säännöllinen ulkomitta,
jolle $\psi(B(x, r)) < \infty$ aina, kun $0 < r < \infty$.

Olkoon $E \subset X$. Silloin $(1) \Leftrightarrow (2)$:

(1) $E \in \mathcal{M}(\psi)$.

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists G_\varepsilon, F_\varepsilon \subset X$:

$$\underbrace{G_\varepsilon}_{\text{avoin}} \supset E \supset \underbrace{F_\varepsilon}_{\text{suljettu}} \text{ ja } \psi(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon.$$

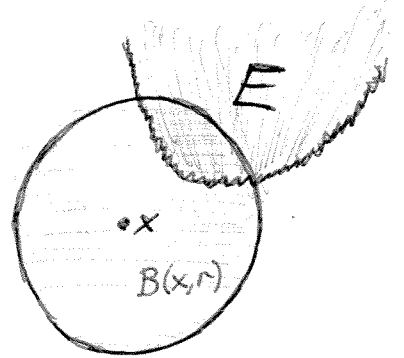


Tod.

$(2) \Rightarrow (1)$ Kuten sivulla 19
(missä ehtoa $\psi(X) < \infty$ ei tarvittu!). $\square$

$(1) \Rightarrow (2)$ Määritellään
 $\varphi_r : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$,
 $\varphi_r(E) := \psi(E \cap B(x, r))$,

missä $x \in X$ ja $0 < r < \infty$.



Edellinen lemma $\Rightarrow$

φ_r Borel-säännöllinen ulkomitta.

Lisäksi $\varphi_r(X) < \infty$, koska $\psi(B(x, r)) < \infty$.

Olkoon $E \in \mathcal{M}(\psi)$. Edellisen lauseen (s.18) mukaan

$$\exists G_r \supset E \text{ avoin: } \varphi_r(G_r \setminus E) < 2^{-r} \varepsilon.$$

Siten $G := \bigcup_{r=1}^{\infty} \underbrace{(G_r \cap B(x, r))}_{\text{avoin}} \supset E$, $E \subset G$.

$$\begin{aligned} \psi(G \setminus E) &= \psi\left(\left[\bigcup_{r=1}^{\infty} (G_r \cap B(x, r))\right] \setminus E\right) \\ &= \psi\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} [(G_r \setminus E) \cap B(x, r)]\right) \\ &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \psi((G_r \setminus E) \cap B(x, r)) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \underbrace{\varphi_r(G_r \setminus E)}_{< 2^{-r} \varepsilon} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Siiis $\psi(G \setminus E) < \varepsilon$, ja vastaavasti saadaan

$F^c \supset E^c$ avoin, jolle $\psi(F^c \setminus E^c) < \varepsilon$

eli $F = E$ suljettu, jolle $\psi(E \setminus F) < \varepsilon$. $\square$

Huom.

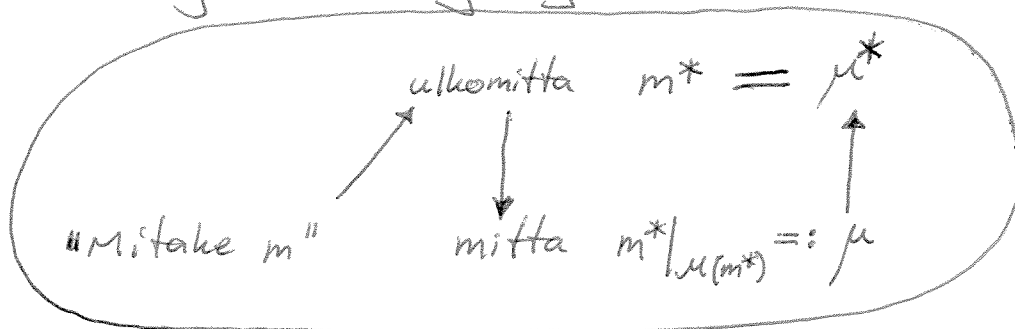
Edellisen lauseen (s.18) ja yleistyksen (s.24) todistuksista nähdään, että $E \in \mathcal{M}(\psi)$ jos ja vain jos $E = B \cup N$, missä $B \in \underbrace{\Sigma(\mathcal{T}_a)}_{\text{Borel-}\sigma\text{-algebra}}$ ja $\psi(N) = 0$.

Yhteenveto edeltävästä:

Usein hyvä mielik kuva: $X = \mathbb{R}^n$, ulkomittana Lebesguen $\lambda_{\mathbb{R}^n}^*$.

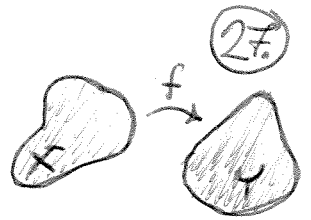
(Kuvien piirtäminen todistuksissa auttaa!).

Ulkomitan ja mitan yhteys:



- Jos $m: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ mitta, niin $m = m^*|_{\mathcal{M}}$ ja m^* on $\mathcal{M}$ -säännöllinen.
- Jos ψ ulkomitta, niin $\psi|_{\mathcal{M}(\psi)}$ täydellinen mitta (voi olla $\psi \neq (\psi|_{\mathcal{M}(\psi)})^*$).
- Caratheodory-ehto $\stackrel{(\mathbb{R}^d) \text{ metr. av.}}{\Leftrightarrow}$ Borel-joukkojen mitallisuus [Tehtävä $\Leftarrow$].
- Sopivin ehdoin (s. 24) mitalliset joukot approksimoituvat ulkoa päin avoimilla joukoilla, sisältä päin suljetuilla joukoilla.

Joukkojen perheiden kuvauksista



Funktiosta $f: X \rightarrow Y$ saadaan kuvaukset

$$f: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y), \quad f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X),$$
$$f(A) := \{f(x) \in Y \mid x \in A\}, \quad f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

On helppo nähdä, että

$$\begin{cases} f(\emptyset) = \emptyset, & f(X) \subseteq Y, \text{ [inkluisio aito, kun } f \text{ ei surjektio]} \\ f(\bigcup_{j \in J} A_j) = \bigcup_{j \in J} f(A_j), \\ f(\bigcap_{j \in J} A_j) \subseteq \bigcap_{j \in J} f(A_j) \text{ [inkluisio voi olla aito!]} \end{cases}$$

ja joskus $f(X \setminus A) \neq Y \setminus f(A)$.

Toisaalta

$$\textcircled{*} \begin{cases} f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, & f^{-1}(Y) = X, \\ f^{-1}(\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j), \\ f^{-1}(\bigcap_{j \in J} B_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j), \\ f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B). \end{cases} \begin{array}{l} \parallel f^{-1} \text{ säilyttää yhdisteen,} \\ \parallel f^{-1} \text{ säilyttää leikkauksen,} \\ \parallel f^{-1} \text{ säilyttää komplementoinnin.} \end{array}$$

f indusoi perheestä $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ perheen

$$\mathcal{C} := \{f^{-1}(B) \subseteq X \mid B \in \mathcal{B}\}$$

ja ko-indusoi perheestä $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ perheen

$$\mathcal{D} := \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

$\textcircled{*} \Rightarrow$ Jos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ topologioita, $\parallel$ Jos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ -algebroida,
niin $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ —"—— $\parallel$ niin $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ —"——.

(numerointi viittaa kirjaan [GZ])
5. Mitalliset funktiot

5.1 Alkeisominaisuudet

Muistutus:

Olkoon τ_x X :n topologia,
 τ_y Y :n topologia.

$f: X \rightarrow Y$ on (τ_x, τ_y) -jatkuv^(jatkuv), jos

$$\{f^{-1}(V) : V \in \tau_y\} \subset \tau_x.$$

[f :n τ_y :stä indusoima topologia]

Määr.

Olkoon $\mathcal{M}$ X :n σ -algebra,
 $\mathcal{N}$ Y :n σ -algebra.

$f: X \rightarrow Y$ on $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -mitallinen^(mitallinen), jos

$$\{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{N}\} \subset \mathcal{M},$$

[f :n $\mathcal{N}$:stä indusoima σ -algebra]

eli $f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$ kaikilla $V \in \mathcal{N}$.

Esim.

Jos $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ tai $\mathcal{N} = \{\emptyset, Y\}$,
 niin kaikki funktiot $f: X \rightarrow Y$ ovat $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -mitallisia.

Esim.

Jos $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$,
 niin vain vakiofunktiot ovat $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -mitallisia.

Nähdään, että

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \Rightarrow X \xrightarrow{g \circ f} Z.$$

$(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -mitallinen $(\mathcal{N}, \mathcal{O})$ -mitallinen $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ -mitallinen.

Meille tärkeä tapaus:

$$Z = Y = [-\infty, \infty] \\ = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\},$$

jolle "hyvä" σ -algebra on
 Borel-joukkojen perhe $\Sigma(\tau_{[-\infty, \infty]})$,
 missä topologian $\tau_{[-\infty, \infty]}$ "alkeissuljettujen" joukkojen
 perhe $\mathcal{C} = \{[a, b] : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$.

Huom. $V \in \tau_{[-\infty, \infty]}$ jos ja vain jos

$$V = U \cup V_{-\infty} \cup V_{\infty},$$

missä $U \subset \mathbb{R}$ avoin (tavallisessa mielessä),
 $V_{-\infty} \in \{\emptyset, [-\infty, b]\}$ (jollakin $b \in \mathbb{R}$),
 $V_{\infty} \in \{\emptyset, [a, \infty]\}$ (jollakin $a \in \mathbb{R}$).

Määr.

Olkoon $\mathcal{M}$ X :n σ -algebra, $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$.
 f on $\mathcal{M}$ -mitallinen (mitallinen), jos se on
 $(\mathcal{M}, \Sigma(\tau_{[-\infty, \infty]}))$ -mitallinen.

Joukon $E \subset X$ karakteristinen funktio

$\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in E, \\ 0, & \text{jos } x \in X \setminus E. \end{cases}$$

Huom.: χ_E on $\mathcal{M}$ -mitallinen jos ja vain jos $E \in \mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ X :n σ -algebra).

Sanontoja:

$\Sigma(\tau)$ -mitallinen $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ on Borel-mitallinen.
 $\uparrow$ (X :n topologia) ($\Sigma(\tau)$ on X :n Borel-joukkojen perhe)

$\mathcal{M}(\lambda_{\mathbb{R}^n}^*)$ -mitallinen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ on Lebesgue-mitallinen.

Merkintöjä:

Olko $a \in \mathbb{R}$ ja $f, g: X \rightarrow [-\infty, \infty]$,

$$\{f > a\} := \{x \in X \mid f(x) > a\},$$

$$\{f > g\} := \{x \in X \mid f(x) > g(x)\}.$$

Vastaavasti määritellään

$$\{f < a\}, \{f \geq a\}, \{f \leq a\}, \{f = a\}, \{f \neq a\},$$

$$\{f < g\}, \{f \geq g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\} \dots$$

Lause 5.2

Olko $\mathcal{M}$ X :n σ -algebra ja $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$.

Silloin $(1) \Leftrightarrow (2)$:

(1) f $\mathcal{M}$ -mitallinen.

(2) $\forall a \in \mathbb{R}: \{f > a\} \in \mathcal{M}$

(vastaavasti $\{f \geq a\} \in \mathcal{M}, \{f < a\} \in \mathcal{M}, \{f \leq a\} \in \mathcal{M}$).

Tod.

$$\boxed{(1 \Rightarrow 2)} \quad \{f > a\} = f^{-1}(\underbrace{[a, \infty]}_{\text{Borel-joukko}}) \stackrel{f \text{ } \mathcal{M}\text{-mitallinen}}{\in} \mathcal{M}.$$

(Vastaavasti käsitellään $\{f \geq a\}, \{f < a\}, \{f \leq a\}$.) $\square$

$\boxed{(2 \Rightarrow 1)}$ Koska $\mathcal{M}$ on σ -algebra, f :n ko-indusoima $\mathcal{D} := \{B \subset [-\infty, \infty] \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\}$ on σ -algebra. Nyt

$$f^{-1}([a, b]) = \underbrace{\{f \geq a\}}_{\substack{\in \mathcal{M} \\ (2)}} \cap \underbrace{\{f \leq b\}}_{\substack{\in \mathcal{M} \\ (2)}} \in \mathcal{M}.$$

Siis $[a, b] \in \mathcal{D}$.

$$\Rightarrow \Sigma(\tau_{[-\infty, \infty]}) \subset \mathcal{D},$$

eli f on $\mathcal{M}$ -mitallinen. $\square$

Esim. Jatkuva $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ on Borel-mitallinen:

$$\{f \geq a\} = f^{-1}(\underbrace{[a, \infty]}_{\text{suljettu}}) \stackrel{f \text{ jatkuva}}{\subseteq} X \text{ suljettu}.$$

$\Rightarrow$ Jatkuva $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ on Lebesgue-mitallinen, koska $\Sigma(\tau_{\mathbb{R}^n}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}^*)$.
 $\uparrow$ ($\mathbb{R}^n$:n tavallinen topologia).

Huom. 5.4. Olkoot $f, g: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ $\mathcal{M}$ -mitallisia.

Silloin $\{f > g\} \in \mathcal{M}$, koska

$$\{f > g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\underbrace{\{f > r\}}_{\in \mathcal{M}} \cap \underbrace{\{g < r\}}_{\in \mathcal{M}}) \in \mathcal{M}.$$

Vastaavasti $\{f \geq g\}, \{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\} \in \mathcal{M}$.