

# Kvalitatiivista maanmittausta (topologiaa)

Olkoon  $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ .

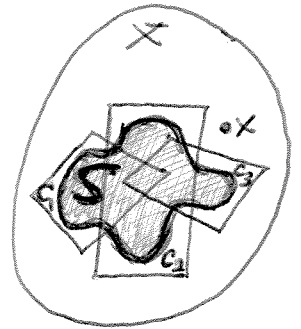
"alkeissuljetut" joukot

Sanotaan, että (perheen  $\mathcal{C}$  suhteen)

$x \in X$  on "kaukana" joukosta  $S \subset X$ ,

jos  $x \notin \bigcup_{j=1}^k C_j$  jollakin joukon  $S$  äärellisellä peitteellä  $\{C_j\}_{j=1}^k \subset \mathcal{C}$ ;

muutoin  $x$  on joukon  $S$  "lähellä".



Joukon  $S \subset X$  sulkeuma on

$$\overline{S} := \{x \in X \mid x \text{ on } S \text{in "lähellä"}\}$$

$$= \bigcap \left\{ \bigcup_{j=1}^k C_j \mid k \in \mathbb{Z}^+, \{C_j\}_{j=1}^k \subset \mathcal{C} \text{ on } S \text{in peite} \right\}.$$

(Vrt. "mitakkeesta"  $m$  ulkomitta  $m^*$ ,  
joukosta  $S$  sulkeuma  $\overline{S}$ )

Esim. Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus,

$$B(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\} \text{ avoin kuula,}$$

$$\mathcal{C} := \{\emptyset, X\} \cup \{ \underbrace{B(x, r)^c}_{= X \setminus B(x, r)} \mid x \in X, r > 0 \}.$$

Jos  $S \subset X$ , niin

$$\overline{S} = \{x \in X \mid \underbrace{\text{dist}(x, S)}_{:= \inf_{s \in S} d(x, s)} = 0\}.$$

Lause

Olkoon  $\bar{S} \subset X$  joukon  $S \subset X$  "lähellä" olevien pisteiden joukko. Silloin

$$(S \mapsto \bar{S}) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

on Kuratowskin sulkeumaoperaattori

eli se toteuttaa ehdot

$$(a) \quad \bar{\emptyset} = \emptyset,$$

$$(b) \quad S \subset \bar{S},$$

$$(c) \quad \overline{\bar{S}} = \bar{S},$$

$$(d) \quad \overline{S \cup T} = \bar{S} \cup \bar{T}.$$

Lisäksi perhe

$$\tau = \{X \setminus \bar{S} : S \subset X\}$$

on joukon  $X$  topologia

eli  $\tau \subset \mathcal{P}(X)$  siten, että

$$(1) \quad \emptyset, X \in \tau,$$

$$(2) \quad U, V \in \tau \Rightarrow U \cup V \in \tau \quad \text{ja}$$

$$(3) \quad \{U_j\}_{j \in J} \subset \tau \Rightarrow \bigcup_{j \in J} U_j \in \tau.$$

Todistus

Tehtävä. ■

Sanontoja:  $(X, \tau)$  topologinen avaruus.

$U \in \tau$  avoin ja  $X \setminus U$  suljettu.

Esim.Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus.

Sulkeumat

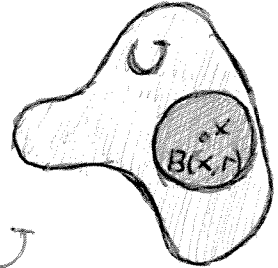
$$\bar{S} = \{x \in X \mid \text{dist}(x, S) = 0\}$$

antavat metrisen topologian

$$\tau_d := \{X \setminus \bar{S} \mid S \subset X\},$$

jolle

$$U \in \tau_d \Leftrightarrow \forall x \in U \exists r > 0 : B(x, r) \subset U.$$

Prop. Olkoot  $(X, \tau_X)$ ,  $(Y, \tau_Y)$  topologisia avaruuksia.Olkoon  $f: X \rightarrow Y$ . Silloin  $(1) \Leftrightarrow (2)$ :(1)  $f$  on jatkuva eli

$$\forall V \in \tau_Y : f^{-1}(V) \in \tau_X.$$

(2) Kaikilla  $x \in X$  ja  $S \subset X$  pätee:

"Jos  $x$  on joukon  $S$  lähellä,  
niin  $f(x)$  on joukon  $f(S)$  lähellä."

Tod.Tehtävä.  $\blacksquare$

# Joukon approksimointi ulkomitan suhteen (säännöllisyys)

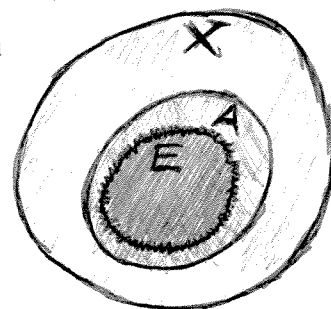
Määr. Olkoon  $\mathcal{M}$   $X$ :n  $\sigma$ -algebra.

Ulkomitta  $\psi: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  on

$\mathcal{M}$ -säännöllinen, jos

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{M}(\psi) \text{ ja}$$

$$\forall E \subset X \exists A \in \mathcal{M}: \begin{cases} E \subset A, \\ \psi(E) = \psi(A). \end{cases}$$



[ "Hyvä joukko  $A$  approksimoi  
paha joukkoa  $E$  ulkoapäin." ]

## Lause

Olkoon  $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  mitta  $X$ :llä.

Silloin  $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  on  $\mathcal{M}$ -säännöllinen.

Tod.

Ota  $E \subset X$ .

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \inf \left\{ \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)}_{\substack{= \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \\ \in \mathcal{M}}}} \mid \{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M} \text{ on } E\text{'n peite} \right\} \\ &= \mu\left(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j}_{\in \mathcal{M}}\right), \text{ kun peite pistevieras} \\ &\quad \text{(ja ainahan voimme "leikellä" annetusta peitteestä pistevieraan)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu^*(E) = \inf \{ \mu(A) : E \subset A \in \mathcal{M} \}.$$

(Onpas mitan synnyttämä ulkomitta kaunis! 😊)

Siten  $\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon \in \mathcal{M} : E \subset A_\varepsilon,$   
 $\mu^*(E) + \varepsilon > \mu(A_\varepsilon).$

Olkoon  $A := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{1/k} \in \mathcal{M}.$

$$\Rightarrow \mu^*(E) \stackrel{E \subset A \in \mathcal{M}}{\leq} \mu(A) \leq \mu(A_\varepsilon) < \mu^*(E) + \varepsilon$$

$$\stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\Rightarrow} \mu^*(E) = \mu(A). \quad \blacksquare$$

[ Ulkomitan  $\mathcal{P}$  lisäksi joskus on tarjolla erityisen kivojen joukkojen perhe  $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}(\mathcal{P})$ , jolla halottaisiin  $\mathcal{P}$ -approksimoida — esim.  $\mathcal{K}$  voi olla topologia... ]

### Lemma

Olkoon  $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ . Silloin on olemassa pienin  $X$ :n  $\sigma$ -algebra  $\Sigma(\mathcal{K})$ , jolle  $\mathcal{K} \subset \Sigma(\mathcal{K})$ .

Tod. Tehtävä.  $\blacksquare$

Määr. Olkoon  $(X, \tau)$  topologinen avaruus.

$\Sigma(\tau)$  on ns. Borel-joukkojen  $\sigma$ -algebra.

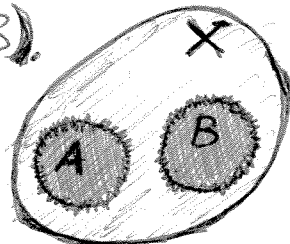
$\Sigma(\tau)$ -säännöllinen ulkomitta on Borel-säännöllinen.

Mitta  $\mu: \Sigma(\tau) \rightarrow [0, \infty]$  on Borel-mitta.

Lause

Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus ja  $\varphi: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  ulkomitta, jolle

$$\underbrace{\text{dist}(A, B) > 0}_{\substack{:= \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b)}} \Rightarrow \varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B).$$



(eli  $\varphi$  on ns. Carathéodory-ulkomitta).

Silloin  $\Sigma(\tau_d) \subset \mathcal{M}(\varphi)$ ,

joten  $\varphi|_{\Sigma(\tau_d)}$  on Borel-mitta.  
 ↖ (metrinen topologia).

Tod.

Riittää osoittaa,  
 että  $\tau_d \subset \mathcal{M}(\varphi)$ .

Ota  $U \in \tau_d$ .

Pitää osoittaa, että  
 $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ ,

kun  $A \subset U$  ja  $B \subset U^c$ .

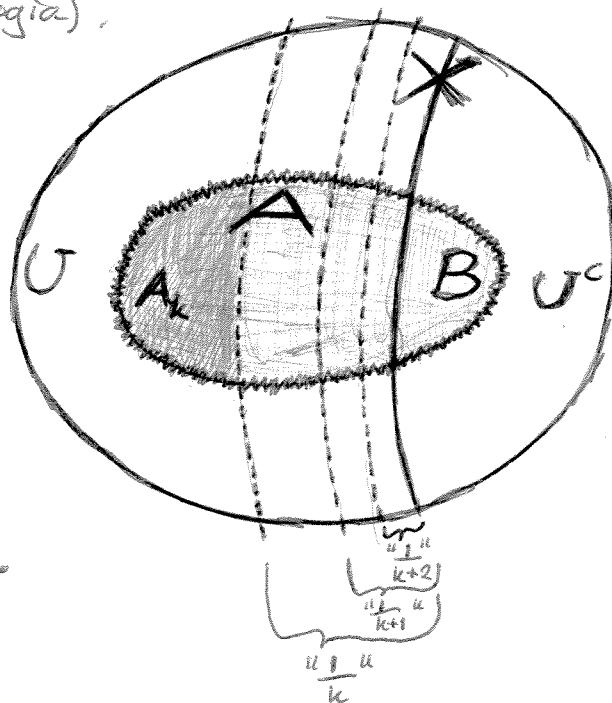
Tapaus  $\varphi(A), \varphi(B) < \infty$  riittää.

Jotta voidaan käyttää

Carathéodory-ehtoa,

pitää "A irrottaa B:stä":

$$A_k := \{x \in A \mid \text{dist}(x, U^c) \geq \frac{1}{k}\}.$$



Saadaan  $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ , koska

$$\begin{aligned} \varphi(A) + \varphi(B) &\stackrel{\text{triv.}}{\geq} \varphi(A \cup B) \\ &\stackrel{A \supset A_k}{\geq} \varphi(A_k \cup B) \quad \left\| \begin{array}{l} \text{dist}(A_k, B) \stackrel{B \subset U^c}{\geq} \text{dist}(A_k, U^c) \\ \geq \frac{1}{k} > 0 \end{array} \right. \\ &\stackrel{\text{Carathéodory}}{=} \varphi(A_k) + \varphi(B) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi(A) + \varphi(B);$$

miksi  $\varphi(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi(A)$ ?

[Huom.  $A_k \subset A_{k+1}$ ,  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  (koska  $\bigcup$  avoin),  
mutta  $A_k, A$  eivät ehkä mitallisia.]

$$\begin{aligned} \varphi(A) &\stackrel{= A_k, \text{ koska } \bigcup \text{ avoin!}}{\geq} \varphi(A_k) = \varphi\left(A \setminus \bigcup_{l=k}^{\infty} \underbrace{(A_{l+1} \setminus A_l)}_{\text{"viipale" (ks. kuva ed. sivulla)}}\right) \\ &\geq \varphi(A) - \underbrace{\sum_{l=k}^{\infty} \varphi(A_{l+1} \setminus A_l)}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0}, \end{aligned}$$

koska kaikilla  $n \in \mathbb{Z}^+$  pätee

$$0 \leq \sum_{l=1}^{2n} \varphi(A_{l+1} \setminus A_l)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{Carathéodory}}{=} \varphi\left(\underbrace{\bigcup_{m=1}^n (A_{2m} \setminus A_{2m-1})}_{\subset A}\right) + \varphi\left(\underbrace{\bigcup_{m=1}^n (A_{2m+1} \setminus A_{2m})}_{\subset A}\right) \\ &\leq 2 \cdot \varphi(A) \\ &< \infty. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Edellisen lauseen Carathéodory-ehdon avulla voidaan siis tunnistaa Borel-joukot mitallisiksi.

Esim. Carathéodory-ulkomittoja:

Lebesgue-ulkomitta  $\lambda_{\mathbb{R}^n}^*$  [GZ 4.3],

Hausdorff-ulkomitat  $\mathcal{H}^s$  [GZ 4.7].

Nämä ovat jopa Borel-säännöllisiä [Mod A].

Lause (Mitallisen joukon topologinen approksimointi)

Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus ja

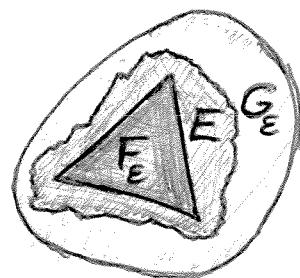
$\psi: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  Borel-säännöllinen ulkomitta, jolle  $\psi(X) < \infty$ . Olkoon  $E \subset X$ .

Silloin  $(1) \Leftrightarrow (2)$ :

(1)  $E \in \mathcal{M}(\psi)$ .

(2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists G_\varepsilon, F_\varepsilon \subset X$ :

$\underbrace{G_\varepsilon}_{\text{avoin}} \supset E \supset \underbrace{F_\varepsilon}_{\text{suljettu}}$  ja  $\psi(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ .



(Huom.  $\psi(G_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$ ,  
 $\psi(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ )



Tod.

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$  Olkoon  $E \supset \underbrace{F_\varepsilon}_{\text{suljettu}}, \quad \psi(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon.$

$$E \supset F := \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{F_{1/k}}_{\text{suljettu}} \in \Sigma(\mathcal{T}_d) \stackrel{\text{Borel}}{\subset} \mathcal{M}(\psi).$$

Nyt  $E \in \mathcal{M}(\psi)$ , koska

$$E = \underbrace{F}_{\in \mathcal{M}(\psi)} \cup \underbrace{(E \setminus F)}_{\in \mathcal{M}(\psi)}, \text{ koska } \psi(E \setminus F) = 0:$$

$$0 \leq \psi(E \setminus F) \leq \psi(E \setminus F_{1/k}) < \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \square$$

[Huom. edellä ei tarvittu ehtoa  $\psi(X) < \infty$   
eikä joukkoja  $G_\varepsilon \dots$ ]

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$  Olkoon

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{M}(\psi) \mid \forall \varepsilon > 0 \exists F_\varepsilon, G_\varepsilon \subset X:$$

$$\underbrace{G_\varepsilon}_{\text{avoin}} \supset A \supset \underbrace{F_\varepsilon}_{\text{suljettu}}, \psi(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon, \psi(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon\}$$

"topologisesti approksimoituvat mitalliset joukot".

Osoitettava:

$$\mathcal{D} = \mathcal{M}(\psi).$$

Miten?

Näytetään, että  $\mathcal{D}$  on  $\sigma$ -algebra, <sup>(a)(b)(c)</sup>  
joka sisältää Borel-joukot, <sup>(a)</sup>  
jolloin Borel-säännöllisyys hoitaa loput, <sup>(e)</sup>

(a)  $\boxed{\emptyset \in \mathcal{D}}$  (triviaalisti)  $\square$

(b)  $\boxed{A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}}$  (triv.)  $\square$

(c)  $\boxed{\mathcal{D} \text{ on } \sigma\text{-algebra}} :$

(a,b)  $\Rightarrow$  riittää näyttää, että

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}, \text{ kun } \{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}.$$

Olkoon  $\underbrace{G_k}_{\text{avoin}} \supset A_k \supset \underbrace{F_k}_{\text{suljettu}}$  s.e.  $\begin{cases} \psi(G_k \setminus A_k) < 2^{-k} \cdot \varepsilon, \\ \psi(A_k \setminus F_k) < 2^{-k} \cdot \varepsilon. \end{cases}$

Silloin  $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$  approksimoi  $(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k)$ :ta sisältä päin:

$$\begin{aligned} \psi\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \setminus \underbrace{\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k}_{\text{suljettu}}\right) &\leq \psi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus F_k)\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\psi(A_k \setminus F_k)}_{< 2^{-k} \cdot \varepsilon} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Vastaavasti avoin  $\bigcap_{k=1}^n G_k$  approksimoi  $(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k)$ :ta ulkoa päin ( $n \in \mathbb{Z}^+$  "suuri"):

$$\begin{aligned} \psi\left(\underbrace{\bigcap_{k=1}^n G_k}_{\text{avoin}} \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\psi(x) < \infty} \psi\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \\ &\leq \dots < \varepsilon \text{ (kuten äsken).} \end{aligned}$$

Lisäksi  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}(\psi)$   
 $\in \mathcal{D} = \mathcal{M}(\psi) \quad \square \text{ (c)}$

(21.)

(d)  $\boxed{\Sigma(\tau_d) = \mathcal{D}}$ :

(c)  $\Rightarrow$  riittää näyttää, että  
 $F \in \mathcal{D}$ , kun  $F \subset X$  suljettu.

$F$  approksimoi itseään sisältäpäin:

$$F_\varepsilon := F, \quad F \supset \underbrace{F_\varepsilon}_{\text{suljettu}}, \quad \psi(F \setminus F_\varepsilon) = 0.$$

$$\text{Avoin } U_\varepsilon := \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon) \supset F,$$

$$\psi(U_{1/k} \setminus F) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\psi(x) < \infty} \psi\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} (U_{1/k} \setminus F)\right) = 0$$

$= \emptyset$ , koska  
 $F$  suljettu

$\Rightarrow$  avoimilla voi approksimoida  $F$ :ää ulkoapäin.

$$F \in \Sigma(\tau_d) \stackrel{\text{Borel}}{\subset} \mathcal{M}(\psi)$$

$$\Rightarrow F \in \mathcal{D}. \quad \square$$

(e)  $\boxed{\mathcal{D} = \mathcal{M}(\psi)}$ :

Ota  $E \in \mathcal{M}(\psi)$ .

Borel-säännöllisyys  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \exists G \in \Sigma(\tau_d): & G \supset E, \quad \psi(G) = \psi(E), \\ \exists F \in \Sigma(\tau_d): & F^c \supset E^c, \quad \psi(F^c) = \psi(E^c). \end{cases}$$

(22)

(d)-kohdan nojalla  $\exists G_\varepsilon, F_\varepsilon$ , joille

$$\underbrace{G_\varepsilon \supset G}_{\text{avoin}} \supset E \supset F \supset \underbrace{F_\varepsilon}_{\text{suljettu}},$$

$$\psi(G_\varepsilon \setminus G) < \varepsilon, \quad \psi(F \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Saadaan

$$\begin{aligned} \psi(G_\varepsilon \setminus E) &\leq \underbrace{\psi(G_\varepsilon \setminus G)}_{< \varepsilon} + \underbrace{\psi(G \setminus E)}_{\begin{aligned} &\equiv \psi(G) - \psi(E) \\ &= 0 \end{aligned}} < \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(E \setminus F_\varepsilon) &\leq \underbrace{\psi(E \setminus F)}_{= \psi(F^c \setminus E^c)} + \underbrace{\psi(F \setminus F_\varepsilon)}_{< \varepsilon} < \varepsilon. \\ &\equiv \psi(F^c) - \psi(E^c) \\ &= 0. \end{aligned}$$

■ (Todistus valmis!)