

$BV([a,b])$ on siis pienin $\mathbb{R}$ -vektoriavaruus, joka sisältää ei-vähenevät funktiot $[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Lause

Olkoon $f \in BV([a,b])$ ja $\mu = (\lambda_{\mathbb{R}})_{[a,b]}$. Silloin $\exists f'(x)$ μ -m.k. $x \in [a,b]$ ja $f' \in L^1(\mu)$.

Tod.

Voidaan olettaa edellisen lemmän nojalla, että $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ on ei-vähenevä.

Voidaan myös määritellä

$$x < a < b < y \Rightarrow f(x) := f(a) \leq f(b) =: f(y).$$

Seuraavassa väliarvaimat (1, 2, 3):

$$(1) \quad \exists f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \mu\text{-m.k. } x \in [a,b].$$

$$(2) \quad f \text{ mitallinen.}$$

$$(3) \quad f' \text{ mitallinen ja } \|f'\|_{L^1(\mu)} \leq f(b) - f(a).$$

$$(1): \quad \{ \nexists f' \} = \{ D^-f = \infty \} \cup \{ D^-f < D^+f \}, \text{ missä}$$

$$D^-f(x) := \liminf_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

$$D^+f(x) := \limsup_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Tehtävä:

osoita, että $\mu(\{D^-f = \infty\}) = 0$

(vinkki: Vitalin peitelause, kuten seuraavassa).

Osoitetaan, että $\mu(\{D^-f < D^+f\}) = 0$.

Ny+

$$\{D^-f < D^+f\} = \bigcup_{r,s \in \mathbb{Q}^+} \underbrace{\{D^-f < r < s < D^+f\}}_{=: E_{rs}}.$$

Riittää siis näyttää, että $\mu(E_{rs}) = 0$.

Ota $\varepsilon > 0$.

Ota $U = [a, b]$ avoin, jolle $\begin{cases} E_{rs} \subset U, \\ \mu(U) < \mu^*(E_{rs}) + \varepsilon. \end{cases}$

$$G := \{I = [a_I, b_I] \subset U \mid \frac{f(b_I) - f(a_I)}{b_I - a_I} < r\}$$

on joukon E_{rs} Vitali-peite.

Vitalin peitelause

$\Rightarrow \exists \mathcal{F} \subset G$ numeroitua erillisten välien perhe,
jolle $\mu(E_{rs} \setminus \bigcup \mathcal{F}) = 0$.

$$\Rightarrow G' := \{J = [a_J, b_J] \mid s < \frac{f(b_J) - f(a_J)}{b_J - a_J}, \exists I \in \mathcal{F} : J \subset I\}$$

on joukon $E'_{rs} := E_{rs} \cap \bigcup_{I \in \mathcal{F}} [a_I, b_I]$ Vitali-peite

Vitalin peitelause

$\Rightarrow \exists \mathcal{F}' \subset G'$ numeroitua erillisten välien perhe,
jolle $\mu(E'_{rs} \setminus \bigcup \mathcal{F}') = 0$.

$$\Rightarrow \mu^*(E_{rs}) = \mu^*(E'_{rs})$$

$$\leq \mu(\bigcup \mathcal{F}') = \sum_{J \in \mathcal{F}'} (b_J - a_J)$$

$$\leq \frac{1}{s} \sum_{J \in \mathcal{F}'} (f(b_J) - f(a_J))$$

$$\leq \frac{1}{s} \sum_{I \in \mathcal{F}} (f(b_I) - f(a_I))$$

$$\leq \frac{r}{s} \sum_{I \in \mathcal{F}} (b_I - a_I) = \frac{r}{s} \mu(\bigcup \mathcal{F})$$

$$\leq \frac{r}{s} \mu(U)$$

$$\leq \frac{r}{s} (\mu^*(E_{rs}) + \varepsilon)$$

$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \in]0, \pi[, \text{ koska } 0 < r < s.$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mu^*(E_{rs}) = 0, \quad \square (1)$$

(2): Ota $t \in \mathbb{R}$.

Jos $t \geq f(b)$, niin $\{f > t\} = \emptyset$.

Jos $t < f(b)$, olkoon

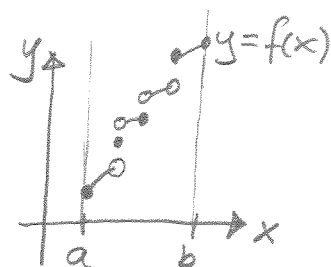
$$c := \inf \{x \in [a, b] : f(x) > t\},$$

jolloin

$$\{f > t\} = \begin{cases} [c, b], & \text{kun } f(c) \leq t < f(b), \\ [c, b], & \text{kun } t < f(c) \leq f(b). \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ on Borel-mitallinen,

joten myös Lebesgue-mitallinen. $\square$ (2)



(3): (1) $\Rightarrow \exists f'(x)$ μ -m.k. $x \in [a, b]$.

$$\Rightarrow g_k(x) := \frac{f(x + 1/k) - f(x)}{1/k}$$

$$\xrightarrow{k \rightarrow \infty} f'(x) \quad \mu\text{-m.k. } x \in [a, b].$$

(2) $\Rightarrow g_k$ mitallinen $\Rightarrow f'$ mitallinen.

$$\|f'\|_{L^1(\mu)} = \int_{[a, b]} f' d\mu$$

$$\stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int g_k d\mu$$

$$= k \cdot \left[\int_a^b f(x + 1/k) dx - \int_a^b f(x) dx \right]$$

$$= \int_{a+1/k}^{b+1/k} f(x) dx$$

$$= \int_b^{b+1/k} f(x) dx - \int_a^{a+1/k} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{k} \cdot f(b) \leq -\frac{1}{k} \cdot f(a)$$

$$\Rightarrow \|f'\|_{L^1(\mu)} \leq f(b) - f(a)$$

$< \infty$. $\square$

7.5 Analyysin peruslause (Fundamental Theorem of Calculus)

Olkoon $\mu = (\lambda_{\mathbb{R}})_{[a,b]}$ eli $\mu(E) = \lambda_{\mathbb{R}}(E \cap [a,b])$.
 Olkoon $g \in L^1(\mu)$ ja $f(a) \in \mathbb{R}$.

Tiedetään (ks. s. 120, Seuraus (Lause 7.15)):

$$f(x) := f(a) + \int_{[a,x]} g \, d\mu \quad (*)$$

$$\Rightarrow \exists f'(x) = g(x) \quad \mu\text{-m.k. } x \in [a,b].$$

Ongelma:

mitä ominaisuuksia funktiolla $h: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ pitää olla, jotta

$$h(x) - h(a) = \int_{[a,x]} h'(x) \, d\mu$$

totentuisi ($\forall x \in [a,b]$)?

Huom.

$\nu \ll \mu$, kun $\nu(E) := \int_E g \, d\mu$ (eli $f(x) - f(a) = \nu([a,x])$).

$$\Rightarrow \underbrace{|\nu| \ll \mu}_{\text{mitta } \nu \text{ on absoluuttisesti jatkuva mitan } \mu \text{ suhteen}}, \text{ missä } |\nu|(E) = \int_E |g| \, d\mu \quad (|\nu| = \nu^+ + \nu^-).$$

(mitta ν on absoluuttisesti jatkuva mitan μ suhteen)

Lause 6.33

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \mu(E) < \delta \Rightarrow |\nu|(E) < \varepsilon. \quad (**)$$

Jos $E \subset [a,b]$ on avoin ja epätyhjä, niin $E = \bigcup \mathcal{I}$,
 missä $\mathcal{I}$ on perhe erillisiä välejä $I = [a_I, b_I] \neq \emptyset$.

Silloin

$$\left\{ \begin{aligned} \mu(E) &= \sum_{I \in \mathcal{I}} |b_I - a_I|, \\ (***) \quad |\nu|(E) &= \sum_{I \in \mathcal{I}} \int_I |g| \, d\mu \\ &\geq \sum_{I \in \mathcal{I}} \left| \int_I g \, d\mu \right| \stackrel{(*)}{=} \sum_{I \in \mathcal{I}} |f(b_I) - f(a_I)|. \end{aligned} \right.$$

(**) ja (***) motivoivat seuraavaa määritelmää:

Määr.

Funktio $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on absoluuttisesti jatkuva,
merk. $f \in AC([a, b])$, jos

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \sum_{I \in \mathcal{I}} |b_I - a_I| < \delta \Rightarrow \sum_{I \in \mathcal{I}} |f(b_I) - f(a_I)| < \varepsilon$$

jokaiselle (numeroituvalla) erillisten pistevieraiden
välien $I = [a_I, b_I] \subset [a, b]$ perheelle $\mathcal{I}$.

Esim. Jos $g \in L^1(\mu)$ ja $f(x) - f(a) = \int_{[a, x]} g \, d\mu$,
niin $f \in AC([a, b])$. (Kohta nähdään, että tässä kaikki!)

Tehtävä: Osoita, että $\text{Lipschitz}([a, b]) \subsetneq AC([a, b]) \subsetneq C([a, b])$.

Banach-Zarecki -lause

Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Silloin $f \in AC([a, b])$ jos ja vain jos (0, 1, 2):

(0) f illä on Luzinin 0-ominaisuus:

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(f(E)) = 0.$$

(1) $f \in C([a, b])$

(2) $f \in BV([a, b])$.

Tod.

"(0, 1, 2) $\Rightarrow AC$ " on kirjassa [GZ, Theorem 7.45],
siirretetään tällä kurssilla. $\square$

" $AC \Rightarrow (0, 1, 2)$ ":

Olkoon seuraavassa $f \in AC([a, b])$.

" $AC \subset C$ ": Selvästi $f \in C([a, b])$. $\square$ (" $AC \Rightarrow (1)$ ")

"AC=BV":

$$V_{f,a}(b) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^k |f(t_j) - f(t_{j-1})| : a=t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b, k \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

$$= \sup \left\{ \sum_{j=1}^k |f(t_j) - f(t_{j-1})| : a=t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b, k \in \mathbb{Z}^+, \right.$$

$$\left. \left\{ a + i \frac{b-a}{M} \right\}_{i=0}^M = \{t_j\}_{j=0}^k \right\}$$

< δ "suurilla $M \in \mathbb{Z}^+$ "

$$\leq M \cdot \varepsilon,$$

missä $\varepsilon > 0, \delta > 0$ kuten funktion f AC-määritelmässä (ks. s. 127).

Siten

$$V_{f,a}(b) \leq M \cdot \varepsilon < \infty. \quad \square ("AC \Rightarrow (2)" \text{ eli } "AC=BV").$$

"AC $\Rightarrow$ (0)":

Olkoon $E \subset [a, b], \mu(E) = 0$; halutaan $\lambda_{\mathbb{R}}(f(E)) = 0$.

Voidaan olettaa, että $E \subset]a, b[$.

Ota $\varepsilon > 0$.

Olkoon $\delta > 0$ kuten f :n AC-määritelmässä.

Ota avoin $U \subset]a, b[$, jolle

$$E \subset U, \mu(U) < \delta.$$

$\Rightarrow U = \bigcup \mathcal{I}$, missä $\mathcal{I}$ on numeroitava perhe erillisiä välejä $I =]a_I, b_I[\neq \emptyset$.

$$\left. \begin{array}{l} \bar{I} = [a_I, b_I] \subset [a, b] \text{ kompakti väli} \\ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ jatkuva} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x_I, y_I \in \bar{I} : f(\bar{I}) = [f(x_I), f(y_I)].$$

$$\Rightarrow \lambda_{\mathbb{R}}^*(f(E)) \stackrel{E \subset U}{\leq} \lambda_{\mathbb{R}}^*(f(U)) \stackrel{U = \bigcup \mathcal{I}}{\leq} \sum_{I \in \mathcal{I}} \underbrace{\lambda_{\mathbb{R}}^*(f(I))}_{= |f(y_I) - f(x_I)|} \stackrel{\circledast}{\leq} \varepsilon. \quad \square$$

$$\circledast: \sum_{I \in \mathcal{I}} |y_I - x_I| \leq \sum_{I \in \mathcal{I}} |b_I - a_I| = \mu(\underbrace{\bigcup \mathcal{I}}_U) < \delta.$$

Lemma

Olkoon $f \in AC([a,b])$ ja $f'(x) = 0$ μ -m.k. $x \in [a,b]$.
Silloin f on vakio.

Tod.

f on jathuva $\Rightarrow \exists c, d \in \mathbb{R} : f([a,b]) = [c,d]$

$\Rightarrow$ riittää osoittaa, että $\lambda_{\mathbb{R}}(f([a,b])) = 0$.

$$E := \{x \in]a,b[: f'(x) = 0\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_{\mathbb{R}}^*(f([a,b])) &\leq \lambda_{\mathbb{R}}^*(f(E)) + \underbrace{\lambda_{\mathbb{R}}^*(f([a,b] \setminus E))}_{\substack{\mu([a,b] \setminus E) = 0, \\ = 0 \text{ [Banach-Zarecki(-Luzin) (0)]}}} \\ &= 0 \text{ [Banach-Zarecki(-Luzin) (0)].} \end{aligned}$$

Ota $\varepsilon > 0$.

$$\mathcal{G} := \{I = [a_I, b_I] \subset]a,b[\mid \forall y, z \in I : |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon |y - z|\}$$

on joukon E Vitali-peite.

Vitali $\Rightarrow \exists \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ numeroitua erillisten välien perhe, jolle
 $\mu(E \setminus \bigcup \mathcal{F}) = 0$.

$$\Rightarrow \lambda_{\mathbb{R}}^*(f(E)) \leq \underbrace{\lambda_{\mathbb{R}}^*(f(\bigcup \mathcal{F}))}_{= \bigcup f(I)} + \underbrace{\lambda_{\mathbb{R}}^*(f(E \setminus \bigcup \mathcal{F}))}_{= 0 \text{ [Banach-Zarecki(-Luzin) (0)]}}$$

$$\leq \sum_{I \in \mathcal{F}} \lambda_{\mathbb{R}}^*(f(I))$$

$= [f(y_I), f(z_I)]$ joillakin $y_I, z_I \in I$ (koska f on jathuva)

$$= \sum_{I \in \mathcal{F}} |f(y_I) - f(z_I)|$$

$$\leq \varepsilon \cdot |y_I - z_I| \leq \varepsilon \cdot |b_I - a_I|$$

$$\leq \varepsilon \cdot \sum_{I \in \mathcal{F}} |b_I - a_I|$$

$$\leq \varepsilon \cdot |b - a|$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0. \quad \blacksquare$$

Analyysin peruslause

Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ja $\mu = (\mathcal{I}_{\mathbb{R}})_{[a, b]}$. Silloin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) $f \in AC([a, b])$.

(ii) $\exists g \in L^1(\mu) \forall x \in [a, b]:$

$$f(x) - f(a) = \int_{[a, x]} g \, d\mu.$$

(iii) $\exists f'(x) \mu\text{-m.k. } x \in [a, b], f' \in L^1(\mu) \text{ ja } \forall x \in [a, b]:$

$$f(x) - f(a) = \int_{[a, x]} f' \, d\mu.$$

Tod.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): triviaali ($g := f'$). $\square$

(ii) $\Rightarrow$ (i): ks. AC-määritelmän motiivointi (s. 126). $\square$

(i) $\Rightarrow$ (iii): Olkoon $f \in AC([a, b])$.

$$f \in AC = BV \xrightarrow{\text{Lause s. 123}} \exists f'(x) \mu\text{-m.k. } x \in [a, b], \\ f' \in L^1(\mu).$$

$$h(x) := f(a) + \int_{[a, x]} f' \, d\mu$$

$$\Rightarrow h \in AC([a, b]),$$

$$h'(x) = f'(x) \mu\text{-m.k. } x \in [a, b] \quad (\text{ks. Seuraus, s. 120}).$$

$$\xrightarrow{\text{Lemma s. 129}} h - f \text{ on vakio}$$

$$\Rightarrow h(x) - f(x) = \underbrace{h(a)}_{=f(a)} - f(a) = 0. \quad \blacksquare$$

Tähän päättyy kurssi,
tästä jatkuu analyysi...