

7. Derivointi $\mathbb{R}^n$:ssä (Analyysin peruslause)

Millä ehdoin

$$f(x) - f(a) = \int_{[a,x]} f' d\lambda_{\mathbb{R}} \quad ?$$

Tiedetään tämän olevan totta,
kun $f \in C^1$ (kerran jatkuvasti derivoituva;
tähän riittää Riemann-integraalikin).

Tavoitteena analyysin peruslause
Lebesgue-integraalin tapauksessa...

7.1 Peittelyä

Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < r < \infty$.

x -keskiset r -säteiset kuulat:

avoin $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$,

suljettu $\overline{B(x, r)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \underbrace{|x - y|}_{= [\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2]^{1/2}} \leq r\}$.

$= [\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2]^{1/2}$,
euklidinen etäisyys.

Kun $0 < \alpha < \infty$ ja $B = \overline{B(x, r)}$,

merkitään $\alpha B := \overline{B(x, \alpha r)}$.

Kun $S \subset \mathbb{R}^n$, määritellään halkaisija

$$\text{diam}(S) := \sup_{x, y \in S} |x - y|.$$

5-peitelemma (Lemma 7.3)

Olkoon $G = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ perhe suljettuja kuulia
jolle

$$R := \sup_{B \in G} \text{diam}(B) < \infty.$$

Silloin on olemassa numeroituva pistevieraiden
kulioiden perhe $\mathcal{F} = G$, jolle

$$\bigcup_{B \in G} B = \bigcup_{B' \in \mathcal{F}} 5B';$$

pätee jopa

$$\forall B \in G \quad \exists B' \in \mathcal{F} : \begin{cases} B' \cap B \neq \emptyset, \\ B \subset 5B'. \end{cases}$$

Tod.

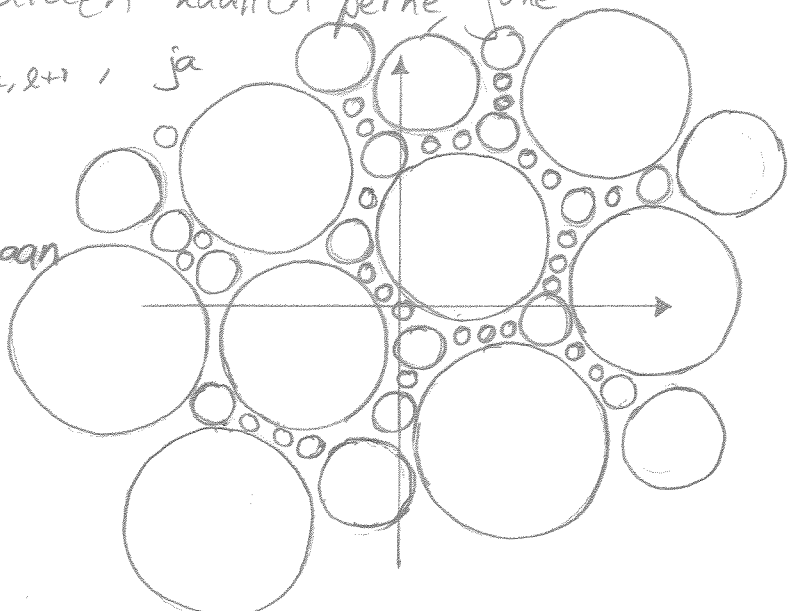
Kun $k \in \mathbb{Z}^+$, olkoon

$$G_k := \{B \in G : 2^{-k}R < \text{diam}(B) \leq 2 \cdot 2^k R\};$$

näin kuulat $B \in G$ jaetaan eri suurusluokkiin.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{k+1,0}, \quad \text{missä} \\ \mathcal{F}_{k+1,0} := \bigcup_{l=0}^{\infty} \mathcal{F}_{k,l}, \quad \text{missä valitaan} \\ \mathcal{F}_{k,l+1} = \{B \in G_k : B \subset B(0, l+1)\} \text{ s.e. se on maksimaalinen} \\ \text{pistevieraiden kulioiden perhe jolle} \\ \mathcal{F}_{k,l} = \mathcal{F}_{k,l+1}, \text{ ja} \\ \mathcal{F}_{1,0} := \emptyset. \end{array} \right.$$

(Vertaus: lapioidaan kuormaan
ensin lohkareet,
sitten hivet,
sitten sora,
sitten hiekka,
sitten hieta, ...)



Nyt $\mathcal{F}_{k,l} \setminus \mathcal{F}_{k,l-1}$ äärellinen ($\forall k, l \in \mathbb{Z}^+$),

$\mathcal{F}_{1,0} = \emptyset, \dots \Rightarrow \mathcal{F}$ numeroitava.

Selvästi $B_1, B_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow B_1 = B_2$ tai $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Ota $B \in \mathcal{G}$.

(1) Jos $B \in \mathcal{F}$, niin triviaalisti $\begin{cases} B \cap B \neq \emptyset, \\ B = 5B. \end{cases} \quad \square$

(2) Oletetaan, että $B \notin \mathcal{F}$.

$\exists! k \in \mathbb{Z}^+ : B \in \mathcal{G}_k$.

$\mathcal{F}_{k,l+1}$ in valinnan maksimaalisuuden nojalla

$\exists B' \in \underbrace{\mathcal{F}_{k+1,0} \setminus \mathcal{F}_{k,0}}_{= \mathcal{G}_k} : B' \cap B \neq \emptyset. \quad \oplus$

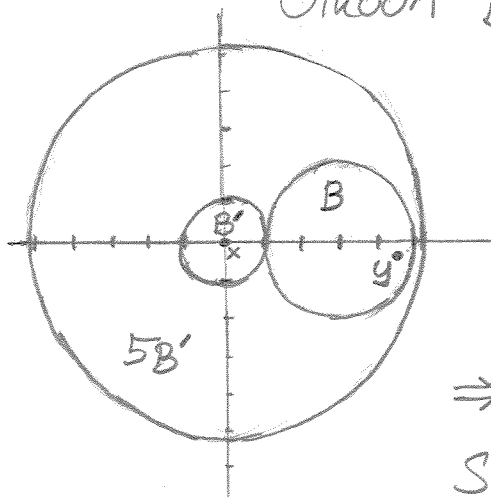
Olko $B' = \overline{B(x,r)}$.

Ota $y \in B$. Nyt

$$|x-y| \leq \underbrace{\frac{1}{2} \text{diam}(B')}_{=r} + \underbrace{\text{diam}(B)}_{\substack{B' \in \mathcal{G}_k \\ \leq 2 \cdot \text{diam}(B') \\ = 4r}} \leq 5r.$$

$$\Rightarrow |x-y| \leq 5r.$$

Siten $B = 5B'$. $\blacksquare$



Käytämme 5-peitelemmaa L^1 -funktioiden tarkastelussa (ns. Hardy-Littlewood -estimaatti) ja sitä ennen Vitalin peiteläuseen (ks. seur. sivu) todistuksessa.

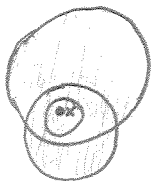
Määr.

Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ perhe suljettuja kuulia.

Sanotaan, että $\mathcal{G}$ on joukon $E \subset \mathbb{R}^n$

hieno peite (eli Vitali-peite), jos

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \in \mathcal{G} :$$



$$\begin{cases} x \in B, \\ 0 < \text{diam}(B) < \varepsilon. \end{cases}$$

Huom.

Vain "pienillä kuulilla" on merkitystä tässä,

sillä jos $\varepsilon_0 > 0$ ja $\mathcal{G}$ on E :n hieno peite,

niin myös $\{B \in \mathcal{G} : \text{diam}(B) < \varepsilon_0\}$ on E :n hieno peite.

Vitalin peitelause (Lause 7.6)

Olkoon $\mathcal{G}$ joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ hieno peite.

Silloin on olemassa numeroituvaa pistevieraiden kuulien perhe $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, jolle

$$\lambda_{\mathbb{R}^n}(E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B) = 0.$$

Tod.

Voidaan olettaa, että $\forall B \in \mathcal{G} : B \cap E \neq \emptyset, \text{diam}(B) \leq 1$.

Oletetaan aluksi, että E on rajoitettu.

Olkoon $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ 5-peitelemman antama, ts.

$$\forall B \in \mathcal{G} \quad \exists B' \in \mathcal{F} : \begin{cases} B' \cap B \neq \emptyset, \\ B \subset 5B'. \end{cases}$$

numeraituva
pistevieraiden
kuulien perhe.

⊗

...

Ota $\varepsilon > 0$.

Ota äärellinen perhe $\mathcal{F}_\varepsilon = \mathcal{F}$ jolle

$$\lambda_{\mathbb{R}^n} \left(\bigcup_{B \in \mathcal{F}_\varepsilon} B' \right) < \varepsilon$$

(huom. nyt jopa $\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu!).

Saadaan haluttu Vitalin tulos, koska

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbb{R}^n}^* \left(E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \right) &\leq \lambda_{\mathbb{R}^n}^* \left(E \setminus \underbrace{\bigcup_{B \in \mathcal{F}_\varepsilon} B}_{\substack{(*) \\ \subset \bigcup_{B' \in \mathcal{F}_\varepsilon} 5B'}} \right) \\ &\leq \sum_{B' \in \mathcal{F}_\varepsilon} \underbrace{\lambda_{\mathbb{R}^n}(5B')}_{= 5^n \lambda_{\mathbb{R}^n}(B')} \\ &= 5^n \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n} \left(\bigcup_{B' \in \mathcal{F}_\varepsilon} B' \right) < 5^n \cdot \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

(*) Ota $x \in E \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{F}_\varepsilon} B$.

$\mathcal{G}$ on hieno peite ja $\bigcup_{B \in \mathcal{F}_\varepsilon} B \subset \mathbb{R}^n$ suljettu

$$\Rightarrow \exists B_x \in \mathcal{G} : \left\{ \begin{array}{l} x \in B_x, \\ B_x \cap \bigcup_{B \in \mathcal{F}_\varepsilon} B = \emptyset. \end{array} \right\} \Rightarrow B'' \in \mathcal{F}_\varepsilon$$

ks. ed. sivu

$$(*) \Rightarrow \exists B'' \in \mathcal{F} : \left\{ \begin{array}{l} B_x \cap B'' \neq \emptyset, \\ B_x \subset 5B''. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x \in B_x \subset 5B''$$

$$\subset \bigcup_{B' \in \mathcal{F}_\varepsilon} 5B'. \quad \square \text{ (Tapaus "E rajoitettu").}$$

Tapaus " $E \subset \mathbb{R}^n$ rajoittamaton"

jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

7.2 Maksimaalifunktio ja Lebesgue-pisteet

Jos mitalliset funktiot ovat melkein kaikkialla samat, ovat niiden integraalit samat. Onko funktion pisteittäisistä arvoista mielekästä puhua?

Merk. $\int_E f d\mu := \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu$
(funktion f integraalikeskiarvo joukossa E).

Määr. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ [tässä $L^p(\mathbb{R}^n) := L^p(\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n})$].
Sen (Hardy-Littlewood -) maksimaalifunktio on

$$Mf: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty],$$

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \int_{B(x,r)} |f| d\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}.$$

Tehtävä

Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Todista:

(a) $(x \mapsto \int_{B(x,r)} |f| d\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}): \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ on jatkuva.

(b) $Mf: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ on Lebesgue-mitallinen.

Tehtävä

Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \neq 0$.

Osoita, että silloin $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

Huom.Kun $f \in L^1(\mu)$, pätee

$$\infty > \|f\|_{L^1(\mu)} \stackrel{\text{Tehtävä 10.3}}{=} \int_{[0, \infty[} \mu(\{|f| > t\}) d\lambda_{\mathbb{R}}(t).$$

Muistetaan Tsebysher-estimaatti (tehtävä 5.3)

$$\mu(\{|f| > t\}) \leq \frac{1}{t} \|f\|_{L^1(\mu)}.$$

Vaikka usein $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, pätee kuitenkinHardy-Littlewood -estimaatti (Lause 7.7)

$$\lambda_{\mathbb{R}^n}(\{Mf > t\}) \leq \frac{5^n}{t} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad (\text{kun } t > 0).$$

Tod.Ota $t > 0$.

$$\forall x \in \{Mf > t\} \quad \exists r_x > 0: \quad t < \int_{B(x, r_x)} |f| d\lambda_{\mathbb{R}^n}.$$

$$\Rightarrow \lambda_{\mathbb{R}^n}(B(x, r_x)) < \underbrace{\frac{1}{t} \int_{B(x, r_x)} |f| d\lambda_{\mathbb{R}^n}}_{\leq \frac{1}{t} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}} \quad (*)$$

$$\text{Olkoon } \mathcal{G} := \{ \overline{B(x, r_x)} : x \in \{Mf > t\} \}.$$

$$R := \sup_{B \in \mathcal{G}} \text{diam}(B) \stackrel{**}{<} \infty.$$

Olkoon $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ 5-peitelemman antama. Nyt

$$\lambda_{\mathbb{R}^n}(\{Mf > t\}) \leq \lambda_{\mathbb{R}^n}(\bigcup_{B \in \mathcal{G}} B) \leq \lambda_{\mathbb{R}^n}(\bigcup_{B' \in \mathcal{F}} 5B')$$

$$\leq \sum_{B' \in \mathcal{F}} \lambda_{\mathbb{R}^n}(5B') = 5^n \sum_{B' \in \mathcal{F}} \lambda_{\mathbb{R}^n}(B')$$

$$\stackrel{(*)}{\leq} \frac{5^n}{t} \sum_{B' \in \mathcal{F}} \int_{B'} |f| d\lambda_{\mathbb{R}^n} = \frac{5^n}{t} \int_{\bigcup_{B' \in \mathcal{F}} B'} |f| d\lambda_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq \frac{5^n}{t} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \quad \blacksquare$$

Määr.

Funktio $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ on lokaalisti L^1 :ssä, merk. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, jos $f \cdot \chi_E \in L^1(\mathbb{R}^n)$ jokaisella rajoitetulla mitallisella $E \subset \mathbb{R}^n$.

Määr.

Piste $x \in \mathbb{R}^n$ on funktion $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

Lebesgue-piste, jos

$$\int_{B(x,r)} |f - f(x)| d\lambda_{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

(jolloin toki myös

$$\int_{B(x,r)} f d\lambda_{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{r \rightarrow 0} f(x).)$$

Lebesguen differentioituvuuslause (Lause 7.8, 7.9)

Funktiolle $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ $\lambda_{\mathbb{R}^n}$ -melkein kaikki pisteet ovat Lebesgue-pisteitä.

Tod.

Koska $r \rightarrow 0$ Lebesgue-pisteen määritelmässä, voidaan olettaa, että $f = f \cdot \chi_{B(x,1)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Ota $\varepsilon > 0$.

Jätetään tehtäväksi osoittaa, että

on olemassa $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, jolle

$$\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon.$$

...

Olkoon

(117.)

$$h(x) := \limsup_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f - f(x)| d\lambda_{\mathbb{R}^n} \\ \leq |f - g| + |g - g(x)| + |g(x) - f(x)|.$$

$$\Rightarrow h(x)$$

$$\leq \underbrace{\limsup_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f - g| d\lambda_{\mathbb{R}^n}}_{\leq M(f-g)} + \underbrace{\limsup_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |g - g(x)| d\lambda_{\mathbb{R}^n}}_{\leq \varepsilon_r} + |g(x) - f(x)| \\ \leq \varepsilon_r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \text{ (g jatkuva)}$$

$$\Rightarrow h(x) \leq M(f-g) + |f(x) - g(x)|.$$

$$\Rightarrow \{h > t\} = \{M(f-g) > t/2\} \cup \{|f - g| > t/2\}$$

$$\Rightarrow \lambda_{\mathbb{R}^n}(\{h > t\}) \leq \underbrace{\lambda_{\mathbb{R}^n}(\{M(f-g) > t/2\})}_{\leq \frac{5^n}{t/2} \|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon} + \underbrace{\lambda_{\mathbb{R}^n}(\{|f-g| > t/2\})}_{\stackrel{\text{(Tsebyshen)}}{\leq} \frac{1}{t/2} \|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon} \\ \text{(Hardy-Littlewood)}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_{\mathbb{R}^n}(\{h > t\}) = 0.$$

$$\text{Siten } \lambda_{\mathbb{R}^n}(\{h > 0\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{\mathbb{R}^n}(\{h > 1/k\}) = 0,$$

$$\text{siis } h(x) = 0 \text{ } \lambda_{\mathbb{R}^n}\text{-m.k. } x \in \mathbb{R}^n. \quad \blacksquare$$

Huom.

Kun $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, voitaisiin määritellä

$$[f]: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$[f](x) := \begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} f d\lambda_{\mathbb{R}^n}, & \text{kun } \exists \text{ raja-arvo,} \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

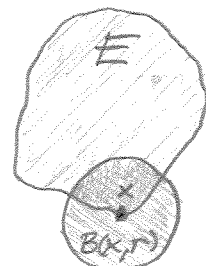
(Silloin jos $f = g$ m.k., niin $[f] - [g] \equiv 0 \dots$).

Tiheystopologiaa

Mitalliselle joukolle $E \subset \mathbb{R}^n$ ja pisteelle $x \in \mathbb{R}^n$ määritellään

$$\overline{D}(E, x) := \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda_{\mathbb{R}^n}(E \cap B(x, r))}{\lambda_{\mathbb{R}^n}(B(x, r))},$$

$$\underline{D}(E, x) := \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda_{\mathbb{R}^n}(E \cap B(x, r))}{\lambda_{\mathbb{R}^n}(B(x, r))}.$$



Jos $\underline{D}(E, x) = \overline{D}(E, x) =: D(E, x)$, sanotaan, että

$D(E, x) \in [0, 1]$ on E :n tiheys x :ssä;

jos $D(E, x) = 1$, on x E :n tiheyspiste.

Näin saadaan tiheystopologia $\tau_D = \tau_{\mathbb{R}^n}$.
(tavallinen topologia).

Mitallisen joukon tiheysreuna on 0-mittainen;

Lebesguen tiheyslause

$$D(E, x) = \begin{cases} 1 & \lambda_{\mathbb{R}^n}\text{-m.k. } x \in E, \\ 0 & \lambda_{\mathbb{R}^n}\text{-m.k. } x \in \mathbb{R}^n \setminus E. \end{cases}$$

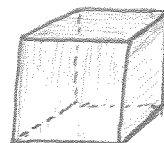
Tod.
Tehtävä. $\blacksquare$

Tehtävä

Tarkastellaan kuutiota

$$K := [0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3.$$

Laske tiheydet $D(K, x)$ ($x \in \mathbb{R}^3$).



7.3 Radon-Nikodym -derivaatta Lebesgue-mittan suhteen

(119.)

$\mu \ll \lambda_{\mathbb{R}^n}$ σ -äärellinen

Radon-Nikodym $\Rightarrow \mu(E) = \int_E \underbrace{\frac{d\mu}{d\lambda_{\mathbb{R}^n}}}_{\text{Radon-Nikodym-derivaatta}} d\lambda_{\mathbb{R}^n}$

$\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$

Jos $x \in \mathbb{R}^n$ on $\frac{d\mu}{d\lambda_{\mathbb{R}^n}}$:n Lebesgue-piste, niin

$$\frac{\mu(B(x,r))}{\lambda_{\mathbb{R}^n}(B(x,r))} = \int_{B(x,r)} \frac{d\mu}{d\lambda_{\mathbb{R}^n}} d\lambda_{\mathbb{R}^n}$$

$\xrightarrow[r \rightarrow 0]{\text{Lebesguen diff. luse}} \frac{d\mu}{d\lambda_{\mathbb{R}^n}}(x)$

(siis $\lambda_{\mathbb{R}^n}$ -m.k. $x \in \mathbb{R}^n$).

Tässä perhe $\{B(x,r)\}_{r>0}$ ei ole olennainen;

Määr.

$\{E_k\}_{k=1}^{\infty} = \mathcal{M}(\lambda_{\mathbb{R}^n}^*)$ kutistuu siististi pisteeseen $x \in \mathbb{R}^n$

(eli "on säännöllinen differentioiva kanta pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$ "),

jos

$$\exists \alpha \in [1, \infty[\quad \exists \{r_k\}_{k=1}^{\infty}: 0 < r_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

$$\forall k: \begin{cases} E_k \subset B(x, r_k), \\ \frac{\lambda_{\mathbb{R}^n}(B(x, r_k))}{\lambda_{\mathbb{R}^n}(E_k)} \leq \alpha. \end{cases}$$



(siis E_k ja $B(x, r_k)$

"ovat samaa kokoluokkaa".)

Propositio

Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue-piste ja $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ x :ään siististi kutistuva. Silloin

$$\int_{E_k} f d\lambda_{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x).$$

Tod.

$$\left| \int_{E_k} f d\lambda_{\mathbb{R}^n} - f(x) \right| = \left| \int_{E_k} (f - f(x)) d\lambda_{\mathbb{R}^n} \right|$$

$$\leq \int_{E_k} |f - f(x)| d\lambda_{\mathbb{R}^n}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Tässä vakio } \alpha \\ \text{ja kuulat } B(x, r_k) \\ \text{kuten edellisen sivun} \\ \text{määritelmässä} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \leq \frac{\lambda_{\mathbb{R}^n}(B(x, r_k))}{\lambda_{\mathbb{R}^n}(E_k)} \underbrace{\int_{B(x, r_k)} |f - f(x)| d\lambda_{\mathbb{R}^n}}_{\substack{\text{Lebesguen} \\ \text{diff. lause} \\ k \rightarrow \infty}} \\ \leq \alpha < \infty \end{array} \right. \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad \blacksquare$$

Seuraus (Lause 7.15)

Olkoon $x \in [a, b]$ funktion $f \in L^1([a, b])$ Lebesgue-piste ja

$$F := (y \mapsto \int_{[a, y]} f d\lambda_{\mathbb{R}}) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Silloin $\exists F'(x) = f(x)$.

Tod.

Asetetaan $f(y) := 0$, kun $y \notin [a, b]$; nyt $f \in L^1(\mathbb{R})$.

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \begin{cases} \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} f d\lambda_{\mathbb{R}}, & \text{jos } h > 0, \\ -\frac{1}{h} \int_{[x+h, x]} f d\lambda_{\mathbb{R}}, & \text{jos } h < 0. \end{cases}$$

Ota $\{r_k\}_{k=1}^\infty$, jolle $0 < r_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

$$\left. \begin{array}{l} E_k^+ := [x, x + \frac{r_k}{2}] \\ E_k^- := [x - \frac{r_k}{2}, x] \end{array} \right\} \subset B(x, r_k) = [x - r_k, x + r_k].$$

$$\Rightarrow \frac{F(x \pm r_k/2) - F(x)}{\pm r_k/2} = \int_{E_k^\pm} f d\lambda_{\mathbb{R}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x)$$

$$\Rightarrow \exists F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x). \quad \blacksquare$$

7.4 Rajoitettu heilahtelu ("Bounded Variation") (121.)

BV.

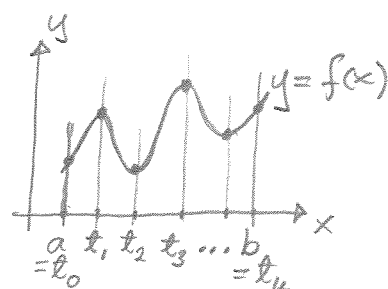
Määr.

Olkoon $-\infty < a < b < \infty$. Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kokonaisvariaatio pisteestä a pisteeseen $x \in [a, b]$ on

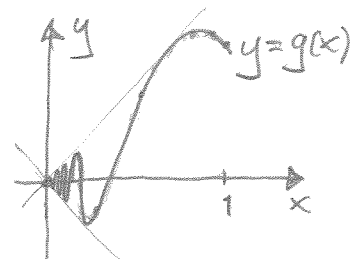
$$V_{f,a}(x) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^k |f(t_j) - f(t_{j-1})| : a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = x, (k \in \mathbb{Z}^+) \right\}$$

Jos $V_{f,a}(b) < \infty$, sanotaan, että f heilahtelee rajoitetusti ("is of bounded variation"), merkitään $f \in BV([a, b])$.

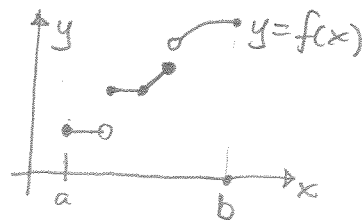
Esim. Jos $f \in C^1([a, b])$,
niin $V_{f,a}(b) = \int_a^b |f'(t)| dt < \infty$.



Esim. $g \in C([0, 1]) \setminus BV([0, 1])$, kun
 $g(x) := \begin{cases} x \sin(1/x), & \text{jos } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{jos } x = 0. \end{cases}$



Esim. Jos $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ovat ei-väheneriä (eli $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ jne.),
niin $f - g \in BV([a, b])$.
(pian nähdään, että kaikki BV-funktiot ovat tätä muotoa.)



Huom. $BV([a, b])$ on normiarvaruus normilla

$$f \mapsto \|f\|_{BV([a, b])} := |f(a)| + V_{f,a}(b).$$

Lause 7.17

Olkoon $f \in BV([a, b])$.

Silloin $f = f_1 - f_2$, missä

$f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ovat ei-väheneviä.

Tod.

Määritellään

$$\left. \begin{aligned} f_1 &:= \frac{1}{2}(V_{f,a} + f), \\ f_2 &:= \frac{1}{2}(V_{f,a} - f). \end{aligned} \right\} \Rightarrow f = f_1 - f_2.$$

Olkoon $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$.

Olkoon $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = x_1$.

Saadaan

$$V_{f,a}(x_2) \geq |f(x_2) - f(x_1)| + \sum_{j=1}^k |f(t_j) - f(t_{j-1})|,$$

joten

$$V_{f,a}(x_2) \geq |f(x_2) - f(x_1)| + V_{f,a}(x_1).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{f,a}(x_2) - f(x_2) \geq V_{f,a}(x_1) - f(x_1), \\ V_{f,a}(x_2) + f(x_2) \geq V_{f,a}(x_1) + f(x_1). \end{cases} \quad \square$$

Huom.

Tämän tuloksen ansiosta BV-funktioista saadaan tietoa tutkimalla ei-vähenevien funktioiden ominaisuuksia.