Topologian ja mittateorian suhteesta

(F. Rieszin esityslause [GZ 97]).

Seuraavassa (X, d) on kompakti metrinen avaruus ja $\tau = \tau_d$ sen (metrinen) topologia. Tässä luvussa esitettävät tulokset yleistyvät sellaisinaan kompakteille Hausdorff-avaruuksille (eli metriikalla ei ole olennaista merkitystä) ja pienin muutoksin lokaalisti kompakteille Hausdorff-avaruuksille (ks. [GZ 97]).

Avaruus $C(X) := \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva} \}$ on Banach-avaruus normilla

$$f \mapsto \|f\|_{C(X)} := \sup_{x \in X} |f(x)| = \max_{x \in X} |f(x)| .$$

Huomaa, että joukko $C(X)$ sisältää kaiken tiedon joukon X topologiasta $\tau = \tau_d$:

$S \subset X$ on suljettu jos ja vain jos

$\exists f \in C(X) : \ S = \{ f = 0 \}$

(esim. $f(x) = d(x, S) := \inf_{y \in S} d(x, y)$).

Seuraavassa etsitään duaalille $C(X)' = \mathcal{L}(C(X), \mathbb{R})$ "käyttökelpoista" esitystä (vertaa: L^p:n duaali, ks. s. 82–83).

Lemma

Olkoon $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ "merkillinen mitta", missä $\tau \subset \mathcal{M}$. Kun $f \in C(X)$, olkoon

$$T_\nu(f) := \int f \, d\nu = \int f \, d\nu^+ - \int f \, d\nu^- .$$

Silloin $T_\nu \in C(X)'$ ja

$$\|T_\nu\| \leq |\nu|(X).$$

Tod.

$\tau \subset \mathcal{M} \Rightarrow f \in C(X)$ on $\mathcal{M}$-mitallinen.

$\nu^+, \nu^- : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ ovat äärellisiä mittoja,

$$|T_\nu(f)| \leq \int |f| \, d\nu^+ + \int |f| \, d\nu^- \leq \|f\|_{C(X)} \underbrace{[\nu^+(X) + \nu^-(X)]}_{= |\nu|(X) < \infty} .$$

$T_\nu : C(X) \to \mathbb{R}$ on lineaarinen integroinnin lineaarisuuden vuoksi. ■

Frigyes Rieszin esityslause [Riesz, Radon, Banach, Kakutani, ...]

Olkoon $M(X) := \{ \nu : \underbrace{\Sigma(\tau)}_{\text{Borel-joukot}} \to \mathbb{R} \mid \nu \text{ "merkillinen mitta"} \}$.

Silloin

$$(\nu \mapsto T_\nu) : M(X) \to C(X)'$$

on isometrinen isomorfismi (eli lineaarinen bijektio, jolle $\underbrace{\|\nu\|}_{=|\nu|(X)} = \|T_\nu\|$).

[Siis $\forall T \in C(X)' \ \exists! \nu \in M(X)$:

$$T = \left(f \mapsto \int f \, d\nu\right), \quad \|T\| = \|\nu\|]$$

[Huom. $M(X)$ on Banach-avaruus, ks. harjoitus 9.2].

F. Rieszin esityslause todistetaan seuraavassa vaiheittain.

Määr.

Funktionaali $T : C(X) \to \mathbb{R}$ on positiivinen, jos $f \geq 0 \Rightarrow T(f) \geq 0$.

[Tehtävä: jos T lineaarinen ja positiivinen, niin se on rajoitettu].

Lemma

Olkoon $T \in C(X)' = \mathcal{L}(C(X), \mathbb{R})$.

Silloin $\exists T^+, T^- \in C(X)'$ positiiviset, joille

$$T = T^+ - T^-,$$

$$\|T\| = \underbrace{\|T^+\|}_{= T^+ 1} + \underbrace{\|T^-\|}_{= T^- 1}.$$

Tod.

Määritellään

$$T^+(f) := T^+(f^+) - T^+(f^-),$$

missä (kun $0 \leq g \in C(X)$)

$$T^+(g) := \sup_{\substack{h \in C(X): \\ 0 \leq h \leq g}} Th.$$

Tässä $T^+(g) \in [0, \underbrace{\|T\| \cdot \|g\|_{C(X)}}_{< \infty}]$, koska

$$0 = T0 \leq T^+(g) \leq \sup_{\substack{h \in C(X) \\ 0 \leq h \leq g}} \|T\| \, \|h\|_{C(X)} = \|T\| \, \|g\|_{C(X)}.$$

Siten $T^+ : C(X) \to \mathbb{R}$ on hyvin määritelty ja positiivinen. Osoitetaan, että T^+ on lineaarinen. (Selvästi $T^+(0) = 0$).

...

...

Ota $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in C(X)$,
$\lambda > 0$, $f \geq 0$, $g \geq 0$.

$$T^+(\underbrace{\lambda f}_{\geq 0}) = \sup_{\substack{h \in C(X) \\ 0 \leq h \leq \lambda f}} Th = \sup_{\substack{h \in C(X) \\ 0 \leq h \leq f}} T(\lambda h)$$

$$\overset{T \text{ lin.}}{=} \lambda \sup_{\substack{h \in C(X) \\ 0 \leq h \leq f}} Th = \lambda T^+(f).$$

$\ldots \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}: \; T^+(\lambda f) = \lambda T^+(f)$.

$$T^+(\underbrace{\overset{\geq 0}{f} + \overset{\geq 0}{g}}_{\geq 0}) = \sup_{\substack{h \in C(X) \\ 0 \leq h \leq f+g}} \underbrace{Th}_{Th_1 + Th_2}$$

$h = h_1 + h_2$, missä
$h_1 := \min(f, h) \in C(X)$, $0 \leq h_1 \leq f$
$h_2 := h - h_1$. $0 \leq h_2 \leq g$

$$\leq T^+(f) + T^+(g)$$

$$= \sup_{\substack{a \in C(X) \\ 0 \leq a \leq f}} Ta + \sup_{\substack{b \in C(X) \\ 0 \leq b \leq g}} Tb$$

$$= \sup_{\substack{a, b \in C(X) \\ 0 \leq a \leq f \\ 0 \leq b \leq g}} T(a+b) \leq T^+(f+g)$$

$\Rightarrow T^+(f+g) = T^+(f) + T^+(g)$, kun $0 \leq f, g \in C(X)$. ⊛

Olkoot $f, g \in C(X)$ nyt yleisiä $\mathbb{R}$-arvoisia.

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+ \qquad \text{(vrt. s. 47)}$$

$$\overset{⊛}{\Rightarrow} T^+((f+g)^+) + T^+(f^-) + T^+(g^-) = T^+((f+g)^-) + T^+(f^+) + T^+(g^+)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{T^+((f+g)^+) - T^+((f+g)^-)}_{=: T^+(f+g)} = \underbrace{T^+(f^+) - T^+(f^-)}_{=: T^+(f)} + \underbrace{T^+(g^+) - T^+(g^-)}_{=: T^+(g)}.$$

Näin on todistettu, että $T^+ : C(X) \to \mathbb{R}$ on lineaarinen ja positiivinen. On myös nähty, että $\|T^+\| \leq \|T\|$.

...

Olkoon $T^- := T^+ - T$.

$T^+, T \in C(X)' \Rightarrow T^- \in C(X)'$.

T^- on positiivinen, sillä jos $0 \le f \in C(X)$, niin

$$T^- f = \sup_{\substack{h \in C(X) \\ 0 \le h \le f}} Th - Tf$$

$$\ge Tf - Tf = 0.$$

Lopuksi $\|T\| = \|T^+\| + \|T^-\|$, koska

$$\|T\| = \|T^+ - T^-\|$$

$$\le \|T^+\| + \|T^-\| \quad \left\| \quad \|T^+\| = \sup_{\substack{f \in C(X) \\ \|f\|_{C(X)} \le 1}} |T^+ f| \overset{T^+ \text{pos.}}{=} T^+ 1 \right.$$

$(1 \in C(X),\ 1(x) \equiv 1)$

$$= T^+ 1 + T^- 1$$

$$= 2T^+ 1 - T1$$

$$= 2 \sup_{\substack{h \in C(X) \\ 0 \le h \le 1}} Th - T1 = \sup_{\substack{h \in C(X) \\ 0 \le h \le 1}} T(\underbrace{2h-1}_{|2h-1| \le 1})$$

$$\le \|T\|. \quad \blacksquare$$

<u>Määr.</u>

Funktion $f \in C(X)$ <u>kantaja</u> ("support") on

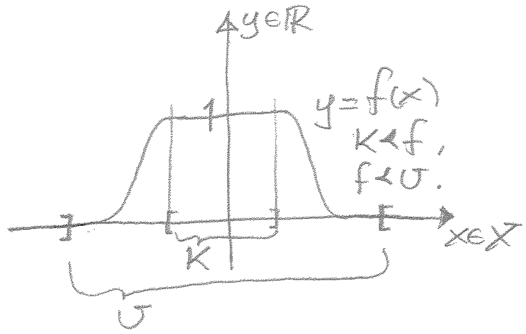
$$\mathrm{supp}(f) := \overline{\{f \ne 0\}}.$$

(sulkeuma!)

Merkitään $K \prec f$, kun $K \subset X$ kompakti ja $\chi_K \le f \le 1$.

Merkitään $f \prec U$, kun $U \subset X$ avoin, $0 \le f \le 1$ ja $\mathrm{supp}(f) \subset U$.

[Lokaalisti kompaktissa Hausdorff-avaruudessa vaadittaisiin lisäksi, että tässä supp(f) olisi kompakti. Nyt ollaan kuitenkin jopa <u>kompaktissa</u> metrisessä avaruudessa]



Urysohnin lemma [(X,d) kompakti metr. av.]*

Olkoon $K \subset U$, missä
$K \subset X$ kompakti,
$U \subset X$ avoin.

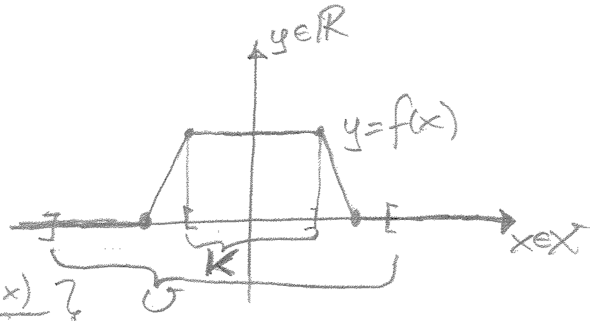
Silloin on olemassa $f \in C(X)$, jolle
$$K \prec f \prec U.$$

Tod.

Määr. $g: X \to \mathbb{R}$ s.e.
$$g(x) := d(x, \underbrace{X \setminus U}_{\text{suljettu}}) = \inf_{y \in X \setminus U} d(x,y).$$

$\forall x \in U: \ g(x) > 0$

g jatkuva, $K \subset U$ kompakti
$$\Rightarrow \underbrace{\inf_{x \in K} g(x)}_{= d(K, U^c)} > 0.$$



$$f(x) := \max\left\{0,\ 1 - 2 \cdot \frac{d(K,x)}{d(K,U^c)}\right\}.$$ ∎

Seuraus (Ykkösen ositus)

Jos $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j \subset X$, missä

K kompakti, U_j avoin $(1 \le j \le n)$,

niin on olemassa $g_j \in C(X)$ $(1 \le j \le n)$, joille
$$g_j \prec U_j,$$
$$K \prec \underbrace{\sum_{j=1}^{n} g_j}_{\text{"ykkönen joukolla } K\text{"}}.$$

*[Huom.
Urysohnin lemma ja ykkösen ositus yleistyvät myös lokaalisti kompaktiin Hausdorff-avaruuteen [GZ 9].]

Tod. (Ykkösen ositus)

$\forall x \in K \quad \exists r_x > 0 \quad \exists j \in \{1, \dots, n\} : \ B(x, 2r_x) \subset U_j.$

Nyt $\{B(x, r_x) \mid x \in K\}$ on kompaktin K avoin peite

$\Rightarrow \exists$ osapeite $\{B(x_i, r_{x_i})\}_{i=1}^{m}$ $(m \in \mathbb{Z}^+)$.

Olkoon
$$K_j := \bigcup \{ \overline{B(x_i, r_{x_i})} \mid i \in \{1, \dots, m\}, \ \overline{B(x_i, r_{x_i})} \subset U_j \}.$$

Nyt $K_j \subset U_j$ kompakti,
joten Urysohnin lemman nojalla
$$\exists f_j : \quad K_j \prec f_j \prec U_j .$$

Nyt $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} K_n \subset \underbrace{\{ \underbrace{\sum_{j=1}^{n} f_j}_{\text{jatkuva}} > 0 \}}_{\text{avoin}}$

$\overset{\text{Urysohn}}{\Rightarrow} \exists f : \ K \prec f \prec \{ \sum_{j=1}^{n} f_j > 0 \}$.

Olkoon $\quad g_j := f_j / \underbrace{(1 - f + \sum_{k=1}^{n} f_k)}_{>0}$. $\blacksquare$

Lause (Riesz-esitys positiivisille lineaarisille)
Olkoon $T \in C(X)'$ positiivinen.
Silloin on olemassa Borel-mitta $\mu : \Sigma(\tau) \to [0, \infty[$, jolle
$$\forall f \in C(X) : \quad Tf = \int f \, d\mu .$$

Tod.

Määritellään $m : \mathcal{T} \to [0,\infty]$ siten, että

$$m(U) := \sup_{f \prec U} Tf.$$

m on "mitake" (ks. s. 1), sillä $\{\emptyset, X\} \in \mathcal{T}$ ja

$$m(\emptyset) = \sup_{f \prec \emptyset} Tf = T0 = 0.$$

Syntyy siis ulkomitta

$$m^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty],$$

$$m^*(E) := \inf \Big\{ \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} m(U_j)}_{\overset{(1)}{\geq}\, m(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j)} \Big| \; U_j \in \mathcal{T},\ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \Big\}.$$

[todistetaan (1) pian!]

$$\Rightarrow \boxed{m^*(E) = \inf_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ E \subset U}} m(U).} \qquad (2)$$

(1):n todistus: $m(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j) = \sup_{f \prec \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j} Tf$.

Ota $f \prec \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$.

Nyt supp(f) kompakti, $\{U_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}$ sen peite

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}^+ :\ \mathrm{supp}(f) \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j$.

Ota "ykkösen ositus" $\{g_j\}_{j=1}^{n}$ s.e.

$$g_j \prec U_j \quad (1 \leq j \leq n), \quad \sum_{j=1}^{n} g_j \Big|_{\mathrm{supp}(f)} = 1$$

$$\Rightarrow Tf = T\Big(f \cdot \sum_{j=1}^{n} g_j\Big)$$

$$\overset{T\text{ lin.}}{=} \sum_{j=1}^{n} T(\underbrace{f \cdot g_j}_{\prec U_j})$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} m(U_j)$$

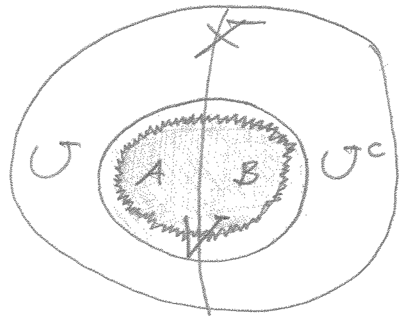
$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} m(U_j). \ \square \ (1)$$

Osoitetaan, että $\tau \subset \mathcal{M}(m^*)$.

Ota $U \in \tau$.

Ota $A \subset U$, $B \subset U^c$, joille

$m^*(A) < \infty$, $m^*(B) < \infty$.



Ota $\varepsilon > 0$.

$$(2) \Rightarrow \exists V \in \tau: \quad A \cup B \subset V, \quad m^*(A\cup B) + \varepsilon > m(V).$$

Ota $f \prec U \cap V$: $m(U\cap V) < Tf + \varepsilon$.

Ota $g \prec \underbrace{\mathrm{supp}(f)^c}_{\supset U^c} \cap V$: $m(\mathrm{supp}(f)^c \cap V) < Tg + \varepsilon$.

$$\begin{aligned} m^*(A\cup B) + \varepsilon &> m(V) \\ &\overset{f+g\prec V}{\geq} T(f+g) \\ &\overset{T \text{ lin.}}{=} Tf + Tg \\ &> m(U\cap V) + m(\mathrm{supp}(f)^c \cap V) - 2\varepsilon \\ &\geq m^*(A) + m^*(B) - 2\varepsilon \\ &\overset{\text{triv.}}{\geq} m^*(A\cup B) - 2\varepsilon \end{aligned}$$

$$\overset{\varepsilon \to 0}{\Longrightarrow} m^*(A\cup B) = m^*(A) + m^*(B)$$

$$\Rightarrow U \in \mathcal{M}(m^*). \quad \boxtimes$$

Voidaan siis määritellä Borel-mitta

$$\mu := m^*|_{\Sigma(\tau)} .$$

[Huom. $m(U) = \mu(U)$.

$\mu(X) = \sup_{f \prec X} Tf = T1 < \infty$.

(2) ⇒ m^* on Borel-säännöllinen.]

Olkoon $\chi_E \leq g \leq \chi_F$, missä $E, F \in \Sigma(\tau)$, $g \in C(X)$.

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\int \chi_E \, d\mu}_{\mu(E)} \leq \int g \, d\mu \leq \underbrace{\int \chi_F \, d\mu}_{=\mu(F)}.} \qquad (3)$$

Lisäksi

$$\boxed{\mu(E) \le Tg \le \mu(F),} \qquad (4)$$

sillä

$$\mu(E) \overset{E\subset\{g\ge 1\}}{\le} \mu(\{g\ge 1\})$$

$$\overset{\delta>0}{\le} \mu(\underbrace{\{g>1-\delta\}}_{\in\mathcal{T},\ \text{koska}\ g\in C(X)}) = \sup_{f\prec\{g>1-\delta\}} Tf$$

$$\overset{T\,\text{pos.}}{\le} T\big(g/(1-\delta)\big) \overset{T\,\text{lin.}}{=} (1-\delta)^{-1}\, Tg$$

$$\xrightarrow[\delta\to 0]{} Tg, \quad \text{siis } \mu(E)\le Tg;$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \underbrace{\mu(X\setminus F)}_{=\mu(X)-\underbrace{\mu(F)}_{<\infty}} \overset{\chi_{F^c}\le 1-g}{\le} \underbrace{T(1-g)}_{\substack{=T1-Tg\\ =\mu(X)-Tg}} \end{matrix}\right\} \quad \text{siis } Tg \le \mu(F). \quad \boxtimes\ (3\&4)$$

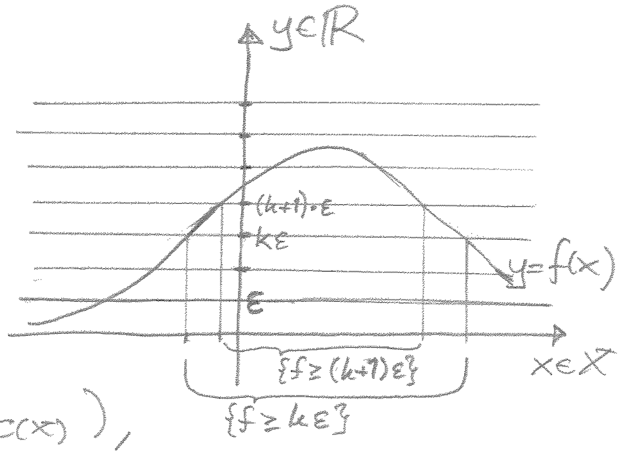
Olkoon $0\le f\in C(X)$.

Näytetään, että $Tf = \int f\,d\mu$.

Ota $\varepsilon>0$.

Määr. $f_\varepsilon\in C(X)$ s.e.

$$f_\varepsilon(x) := \min(f(x),\varepsilon).$$



$$\Rightarrow \quad (5) \qquad f = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(f_{(k+1)\varepsilon} - f_{k\varepsilon})}_{=0\ \text{"suurilla } k\text{"}}$$

(kun $k\cdot\varepsilon \ge \|f\|_{C(X)}$),

$$(6) \qquad \varepsilon\cdot\chi_{\{f\ge(k+1)\varepsilon\}} \le f_{(k+1)\varepsilon} - f_{k\varepsilon} \le \varepsilon\cdot\chi_{\{f\ge k\varepsilon\}}.$$

$$\left.\begin{array}{l} (3,6)\Rightarrow\ \varepsilon\cdot\mu(\{f\ge(k+1)\varepsilon\}) \le \int (f_{(k+1)\varepsilon}-f_{k\varepsilon})\,d\mu \le \varepsilon\cdot\mu(\{f\ge k\varepsilon\}), \\ (4,6)\Rightarrow\ \quad -\!\!\text{"}\!\!- \quad \le T(f_{(k+1)\varepsilon}-f_{k\varepsilon}) \le \quad -\!\!\text{"}\!\!- \quad . \end{array}\right\} (7)$$

...

Nyt

$$\left| \int f \, d\mu - Tf \right| \overset{(5)}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \int (f_{(k+1)\varepsilon} - f_{k\varepsilon}) \, d\mu - T(f_{(k+1)\varepsilon} - f_{k\varepsilon}) \right|$$

$$\overset{(7)}{\leq} \varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left[\mu(\{f \geq k\varepsilon\}) - \mu(\{f \geq (k+1)\varepsilon\}) \right]$$

$$= \varepsilon \cdot \underbrace{\mu(X)}_{<\infty} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

eli $Tf = \int f \, d\mu$. ▨ [Riesz-esitys positiivisille lineaarisille, s. 103]

Rieszin esityslauseen (ks. s. 98) todistus:

Ota $T \in C(X)'$.

$$\begin{cases} T = T^+ - T^- \ldots & \text{[Lemma, s. 99]} \\ T^+ = (f \mapsto \int f \, d\mu) \\ T^- = (f \mapsto \int f \, d\lambda) \end{cases} \Big\} \text{ [Lause s. 103]}$$

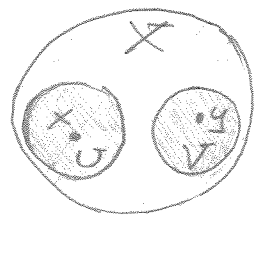
$$\Rightarrow T = (f \mapsto \int f \, d(\underbrace{\mu - \lambda}_{\text{"merkillinen mitta" } \Sigma(\tau) \to \mathbb{R}})),$$

$$\begin{aligned} \|T\| &= \|T_{\mu-\lambda}\| \\ &\overset{s.98}{\leq} \|\mu - \lambda\| \\ &\leq \|\mu\| + \|\lambda\| = \mu(X) + \lambda(X) = T^+1 + T^-1 \\ &= \|T^+\| + \|T^-\| \\ &= \|T\|. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|T\| = \|\mu - \lambda\|$. ▨ [Riesz, s. 98]

Yleistys (jota ei todisteta kurssilla)

Topologinen avaruus (X,τ) on **Hausdorff-avaruus**, jos kaikilla eri pisteillä $x,y\in X$ on olemassa $U,V\in\tau$, joille $\begin{cases} x\in U,\ y\in V,\\ U\cap V=\emptyset.\end{cases}$



Topologinen avaruus (X,τ) on **lokaalisti kompakti**, jos jokaisella $x\in X$ on olemassa $U\in\tau$, jolle

$x\in U$ ja $\overline{U}$ on kompakti.

Esim. $\mathbb{R}^n$ on lokaalisti kompakti ja Hausdorff; metrinen topologia on aina Hausdorff.

Määr.
Olkoon (X,τ) lokaalisti kompakti Hausdorff.

$$C_0(X) := \{f\in C(X) \mid \underbrace{\forall\varepsilon>0 : \{|f|\geq\varepsilon\}\subset X \text{ kompakti}}_{(\text{"f katoaa äärettömyydessä"})}\}$$

on Banach-avaruus normilla

$$f\mapsto \|f\|_{C_0(X)} := \sup_{x\in X}|f(x)|.$$

Olkoon $M(X) := \{\nu:\Sigma(\tau)\to\mathbb{R} \mid \nu$ "merkillinen mitta", jolle ν^+,ν^- toteuttavat $\circledast$:n$\}$,

$\|\nu\| := |\nu|(X)$.

$$\left[\circledast:\ \nu^\pm(E) = \inf_{\substack{U\in\tau\\ E\subset U}} \underbrace{\nu^\pm(U)}_{=\sup_{\substack{K \text{ kompakti}\\ K\subset U}}\nu^\pm(K)}\right]$$

Riesz:

$(\nu\mapsto T_\nu): M(X)\to C_0(X)'$

on isometrinen isomorfismi,

missä $T_\nu f := \int f\,d\nu$
$= \int f\,d\nu^+ - \int f\,d\nu^-$.

[Lisäehto $\circledast$ toteutuu automaattisesti, jos topologialla τ on numeroituva kanta]