Mat-1.3081 Algebra I Kevät 2008 Nevanlinna / Maasalo

Harjoitus 2

1) Olkoon p alkuluku. Osoita, että $(p-1)!+1 \equiv 0 \mod p$

2) Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ja $a \equiv b \mod m$, $c \equiv d \mod m$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että

a) $ax + cy \equiv bx + dy \mod m \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$

b) $ac \equiv bd \mod m$

c) $a^n \equiv b^n \mod m \quad \forall n \in \mathbb{N}$

d) $f(a) \equiv f(b) \mod m$, jos f on kokonaislukukertoiminen polynomi

3) Olkoon luvun a esitys 10-järjestelmässä $a = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{10}$. Osoita, että tällöin

$$3 \mid a \quad \Leftrightarrow \quad 3 \mid a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

4) Kun luku $a \in \mathbb{Z}$ jaetaan jakoalgoritmin mukaisesti luvulla $m > 0$,

$$a = qm + r,$$

missä $q \in \mathbb{Z}$ ja $0 \le r < m$. Lukua r kutsutaan a:n jäännökseksi mod m. Laske seuraavien lukujen pienin ei-negatiivinen jäännös mod m.

a) $2^{71} + 17 \cdot 6^{833}$, kun $m = 5$

b) $\sum_{i=1}^{100} i!$, kun $m = 5$ tai $m = 7$

c) 1234^{1234}, kun $m = 7$

$\Rightarrow$